Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **Test** 27 d'Octubre de 2004

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....

NOTA: ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Aplicant el mètode d'Euler amb pas h al problema de Cauchy $y'' - (y')^2 + xy = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, en l'interval $[0, 2h]$, hem obtingut el valor aproximat $y'(2h) \cong 2.75$. Quin valor de h hem usat?
(a) $h = 0.5$. ☐ (b) $h = 7/6$. ☐ (c) $h = 1$. ☐ (d) $h = 0.25$. ☐

Solució: (a)

Resolució: Expressant l'equació diferencial com a sistema, tenim el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = z \\ z' = z^2 - xy \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ Mètode d'Euler amb pas h: $\begin{cases} y_0 = -1 \\ z_0 = 1 \\ y_i = y_{i-1} + hz_{i-1} \\ z_i = z_{i-1} + h(z_{i-1}^2 - x_{i-1}y_{i-1}) \end{cases}$, essent $x_i = ih$.

Construïm la taula

i	x_i	y_i	z_i
0	0	-1	1
1	h	$-1+h$	$1+h$
2	$2h$	$-1+2h+h^2$	$1+2h+3h^2$

Tenim l'aproximació $y'(2h) \simeq z_2 = 1 + 2h + 3h^2 = 2.75$. Resolent l'equació de 2n grau, i tenint en compte que $h > 0$, $h = 0.5$.

---

2. Considerem les funcions vectorials $\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 5e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \right\}$. Aquestes funcions són un conjunt fonamental de solucions d'un sistema lineal homogeni $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, amb una matriu $A(t)$, 2×2, del tipus:

   (a) $A(t)$ matriu constant no diagonalitzable. ☐
   (b) $A(t)$ matriu de traça igual a 4. ☐
   (c) $A(t)$ matriu de traça igual a e^{2t}. ☐
   (d) $A(t)$ matriu de traça negativa. ☐

Solució: (b)

Resolució: Considerem la matriu $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 5e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$, que donarà una solució matricial del sistema: $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.
Per la fórmula de Liouville, $(\det \Phi(t))' = (\text{tr}A(t)) \det \Phi(t)$. Com que $\det \Phi(t)) = -4e^{4t}$, resulta $\text{tr}A(t) = 4$, per a tot t. Això descarta les respostes (c) i (d).
Si la matriu $A(t)$ fos constant no diagonalitzable, tindria un únic valor propi λ i les solucions només contindriem termes de la forma $e^{\lambda t}$ i $te^{\lambda t}$, descartant així la resposta (a).
La resposta (b) és certa, ja que la matriu $A(t)$ existeix i ve donada per $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$.

---

3. Sigui $\vec{x}(t)$ la solució del problema de valors inicials $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per a quin valor de t són iguals les dues components de $\vec{x}(t)$?
(a) $t = 2$. ☐ (b) $t = 3$. ☐ (c) $t = -1$. ☐ (d) $t = 1$. ☐

Solució: (d)

Resolució: La solució del problema de valors inicials és $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}(0)$. Com que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és en forma de Jordan, la seva exponencial es calcula directament: $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Per tant la solució és $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}$. Igualant els dos components, $e^t = te^t$, resulta que ha de ser $t = 1$.

---

4. Totes les solucions periòdiques de l'equació diferencial ordinària $x'' + 9x = \sin(2\pi t)$ són:

(a) $x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$. ☐ (b) $x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \dfrac{1}{9-4\pi^2}\sin(2\pi t)$. ☐
(c) $x(t) = \dfrac{1}{9-4\pi^2}\sin(2\pi t)$. ☐ (d) $x(t) = \dfrac{1}{9-4\pi^2}\cos(2\pi t)$. ☐

Solució: (c)

Resolució: Es tracta d'una equació d'oscil·lacions forçades no esmorteïdes. El període mínim de les solucions de la part homogènia és $p_0 = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{3}$ (ja que $\omega^2 = 9$). El període mínim del forçament $\sin 2\pi t$ és $p = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$. Tenim $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{3}{2\pi}$ irracional. Per tant, existeix una única solució periòdica. Resolent per coeficients indeterminats, hem de buscar una solució particular $x_p(t) = d_1 \cos 2\pi t + d_2 \sin 2\pi t$, la qual ja és periòdica. Substituint a l'equació diferencial, deduïm $d_1 = 0$, $d_2 = \dfrac{1}{9-4\pi^2}$. Per tant, l'única solució periòdica és $x_p(t) = \dfrac{1}{9-4\pi^2}\sin 2\pi t$.

---

5. Quina és l'equació diferencial ordinària lineal homogènia de coeficients constants d'ordre mínim que té per solucions $\cos(x)$, $\cos^2(x)$?

(a) $y''' + 2y' = 0$. ☐ (b) $y^{\mathrm{v})} + 5y''' + 4y' = 0$. ☐
(c) $y^{\mathrm{iv})} + 5y'' + 4y = 0$. ☐ (d) $y'' + y = 0$. ☐

Solució: (b)

Resolució: Recordem que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Si una equació diferencial lineal homogènia a coeficients constants té $\cos x$, $\cos^2 x$ com a solucions, el seu polinomi característic ha de tenir almenys les arrels 0, $\pm i$, $\pm 2i$. El polinomi de grau més petit amb aquestes arrels és $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = \lambda^5 + 5\lambda^3 + 4\lambda$. Per tant l'equació és $y^{\mathrm{v})} + 5y''' + 4y' = 0$.
