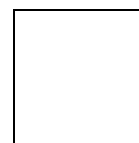


NOM:
 COGNOMS:
 DNI:



NOTA:

Marqueu amb la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. L'aproximació $Z_2(t)$ de Picard de la solució $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ del sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x - y - t \\ x + y \end{pmatrix}$ amb valor inicial $Z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és:

- (a) $Z_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (b) $Z_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2/2 + t^3/6 \\ -t^3/6 \end{pmatrix}$.
 (c) $Z_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2/2 - t^3/6 \\ -t^3/6 \end{pmatrix}$. (d) $Z_2(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 + t^3/6 \\ -t^3/6 \end{pmatrix}$.

Solució: (c)

Resolució:

$$Z_1(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_2(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} -s^2/2 - s \\ -s^2/2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -t^3/6 - t^2/2 \\ -t^3/6 \end{pmatrix}$$

2. Considereu el problema de Cauchy $X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t)$, $X(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de t_0 , les tres components de $X(1)$ són iguals?

- (a) $t_0 = 2$. (b) $t_0 = -1/2$. (c) $t_0 = 1/2$. (d) $t_0 = -2$.

Solució: (a)

Resolució: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ està en forma de Jordan $\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} e^{-2t_0} \\ (2 - t_0)e^{-2t_0} \\ e^{-2t_0} \end{pmatrix} \Rightarrow X(1) = \begin{pmatrix} e^{2-2t_0} \\ e^{2-2t_0}(3 - t_0) \\ e^{2-2t_0} \end{pmatrix} \Rightarrow t_0 = 2.$$

3. Trobeu l'equació diferencial ordinària lineal homogènia i a coeficients constants d'ordre mínim que té per solucions $1, \cos 2x, \cos^2 x, \sin^2 x, \sin 2x$

- (a) $y''' + y' = 0$. (b) $y''' + 4y' = 0$.
 (c) $y^{(v)} + 5y''' + 4y' = 0$. (d) $y^{(iv)} + 5y'' - 4y' = 0$.

Solució: (b)

Resolució: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow$ només cal mirar que $1, \cos 2x$ i $\sin 2x$ siguin solució $\Rightarrow m = 0; \pm 2i$ han de ser arrels del polinomi característic \Rightarrow el polinomi característic d'ordre mínim és $m(m^2 + 4) = 0 \Rightarrow$ l'equació diferencial ordinària és $D(D^2 + 4)y = 0$, que és equivalent a $y''' + 4y' = 0$.

4. La càrrega $x(t)$ en un condensador dins un circuit LRC , amb $L = 1, C = 1$ i $R > 0$ i força electromotriu $f(t) = 2 \sin t$ satisfà l'equació $x'' + Rx' + x = f(t)$. El factor d'amplificació de l'oscil·lació (és a dir, el quocient entre l'amplitud de l'única solució periòdica de l'equació diferencial ordinària i l'amplitud del forçament) és:

- (a) $1/R$. (b) $1/\sqrt{R^2 + 1}$. (c) $R^2 + 1$. (d) $\sqrt{2R}$.

Solució: (a)

Resolució: Calculant la solució periòdica de la forma $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$ obtenim que $A = -\frac{2}{R}$; $B = 0 \Rightarrow x_p(t) = -\frac{2}{R} \cos t$, d'amplitud $\frac{2}{R}$. L'amplitud de $f(t)$ és $2 \Rightarrow$ el factor d'amplificació és $\frac{2/R}{2} = \frac{1}{R}$.

5. Considerem el sistema $X'(t) = A(t)X(t)$, $t \in I$ i dues solucions matricials $\phi_1(t)$ i $\phi_2(t)$ amb wronskians $W_1(t)$ i $W_2(t)$, respectivament. Aleshores:

- (a) $W_1(t) + W_2(t)$ és constant. (b) $W_1(t) - W_2(t)$ és constant.
 (c) $W_1(t) \cdot W_2(t)$ és constant. (d) $W_1(t)/W_2(t)$ és constant.

Solució: (d)

Resolució: Pel teorema de Liouville:

$W_1(t) = W_1(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{traça } A(s)ds}$, t_0 fix i $W_2(t) = W_2(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{traça } A(s)ds}$, t_0 fix \Rightarrow
 $\frac{W_1(t)}{W_2(t)} = \frac{W_1(t_0)}{W_2(t_0)}$, t_0 fix $\Rightarrow \frac{W_1(t)}{W_2(t)}$ és constant.