Equacions diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora 30 Octubre 2002

NOM: ....

COGNOMS: ....

DNI: ....

GRUP: .... **NOTA:** [ ]

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Una solució de l'equació diferencial ordinària $y'' + 4y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, és:

   (a) $y = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x \dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$ ☐

   (b) $y = 2x\cos 2x + \dfrac{x}{4}\sin 2x + 2\ln(\cos x)$ ☐

   (c) $y = x^2 \sin 2x + [\cos 2x + x\sin 2x]\ln(\cos x)$ ☐

   (d) $y = \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{x}{2}\cos 2x + (\cos 2x)\ln(\cos x)$ ☐

   Solució: $y'' + 4y = \tan x \Longrightarrow$ un conjunt fonamental de l'equació diferencial ordinària homogènia associada és: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x \Longrightarrow W = 2$.

   D'altra banda, $W_1 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)$, $W_2 = \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\cos x$.

   Aleshores:

   $$y_G(x) = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}(\ln\cos x)\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

   $\Longrightarrow$ una solució (amb $c_1 = c_2 = 0$) és $y = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x\dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$.

---

2. Siguin $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ dues solucions del sistema de 1r ordre $\vec{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{Y}(t)$, $t > 0$. Si denotem per $W(t)$ el wronskià de $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ i sabem que $W(1) = 1$, llavors:

   (a) $W(t) = te^t$ ☐ (b) $W(t) = t + \ln t$ ☐

   (c) $W(t) = ate^t$, $a > 0$ qualsevol ☐ (d) $W(t) = te^{t-1}$ ☐

   Solució: Pel teorema de Liouville sabem que

   $$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{traça} A(s)ds} = W(1)e^{\int_1^t +(\frac{1}{s}+1)ds} = e^{\ln s + s\big]_1^t} = e^{\ln t + t - 1} = te^{t-1}$$

---

3. Reescrivint el problema de Cauchy $y''(x) = -2x + y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, com un sistema de 1r ordre i aplicant el mètode d'integració numèrica d'Euler amb un pas $h = 0.1$, el valor aproximat de $y(0.3)$ és:
(a) 3.088 ☐ (b) 0.58 ☐ (c) 3.03 ☐ (d) 3 ☐

Solució: El sistema de 1r ordre associat és $\left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ z' = -2x + y \end{array} \right.$ tal que $\begin{array}{c} y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \end{array}$, d'on el valor aproximat de $y(0.3)$ es calcula per

i	x_i	$y_i = y_{i-1} + hz_{i-1}$	$z_i = z_{i-1} + h(-2x_{i-1} + y_{i-1})$
$i = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 3$	$z_0 = 0$
$i = 1$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 3$	$z_1 = 0.3$
$i = 2$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 3.03$	$z_2 = 0.58$
$i = 3$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 3.088$	

4. Considereu el problema de valor inicial per a unes oscil.lacions forçades esmorteïdes:
$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + ax' + x = f(t) \\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1 \end{array} \right.$$
essent $a > 0$. Si definim l'energia total com la funció $E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2$, la condició per tal que $E'(0) < 0$, és:
(a) $f(0) < a$ ☐ (b) $f'(0) > a$ ☐ (c) $f(0) > 0$ ☐ (d) $f'(0) < 0$ ☐

Solució:
$$\begin{aligned} E'(t) &= x'(t)x''(t) + x(t)x'(t) = x'(t)[f(t) - ax'(t) - x(t)] + x'(t)x(t) \\ &= x'(t)[f(t) - ax'(t)]\,. \end{aligned}$$
Per tant $E'(0) = x'(0)[f(0) - ax'(0)] = [f(0) - a] < 0 \iff f(0) < a$.

5. Totes les solucions periòdiques de l'equació $x'' + 4x = \cos(\pi t)$, són:

(a) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐
(b) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐
(c) $x(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐
(d) $x(t) = \dfrac{-1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

Solució: $x'' + 4x = \cos \pi t \Longrightarrow p_0 = \pi$, $p = 2 \Longrightarrow$ existeix una única solució periòdica i té període 2.
Resolent l'equació diferencial ordinària homogènia associada, tenim que $x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.
Pel mètode del polinomi anul.lador trobem que $x_p(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$. Com $x_p(t)$ és 2-periòdica i només hi ha una solució 2-periòdica, aquesta és la solució buscada.

Equacions diferencials **Codi: 22701** **B**

Temps: 1 hora 30 Octubre 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:** ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Totes les solucions periòdiques de l'equació $x'' + 4x = \cos(\pi t)$, són:

   (a) $x(t) = \dfrac{-1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

   (b) $x(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

   (c) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐

   (d) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐

   Solució: $x'' + 4x = \cos \pi t \Longrightarrow p_0 = \pi$, $p = 2 \Longrightarrow$ existeix una única solució periòdica i té període 2.
   Resolent l'equació diferencial ordinària homogènia associada, tenim que $x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.
   Pel mètode del polinomi anul.lador trobem que $x_p(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$. Com $x_p(t)$ és 2-periòdica i només hi ha una solució 2-periòdica, aquesta és la solució buscada.

---

2. Considereu el problema de valor inicial per a unes oscil.lacions forçades esmorteïdes:

$$\begin{cases} x'' + ax' + x = f(t) \\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

   essent $a > 0$. Si definim l'energia total com la funció $E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2$, la condició per tal que $E'(0) < 0$, és:

   (a) $f'(0) < 0$ ☐ (b) $f(0) > 0$ ☐ (c) $f'(0) > a$ ☐ (d) $f(0) < a$ ☐

   Solució:

$$\begin{aligned} E'(t) &= x'(t)x''(t) + x(t)x'(t) = x'(t)[f(t) - ax'(t) - x(t)] + x'(t)x(t) \\ &= x'(t)[f(t) - ax'(t)]\,. \end{aligned}$$

   Per tant $E'(0) = x'(0)[f(0) - ax'(0)] = [f(0) - a] < 0 \Longleftrightarrow f(0) < a$.

---

3. Una solució de l'equació diferencial ordinària $y'' + 4y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, és:

   (a) $y = \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{x}{2}\cos 2x + (\cos 2x)\ln(\cos x)$ ☐
   (b) $y = x^2 \sin 2x + [\cos 2x + x\sin 2x]\ln(\cos x)$ ☐
   (c) $y = 2x\cos 2x + \dfrac{x}{4}\sin 2x + 2\ln(\cos x)$ ☐
   (d) $y = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x \dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$ ☐

   Solució: $y'' + 4y = \tan x \Longrightarrow$ un conjunt fonamental de l'equació diferencial ordinària homogènia associada és: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x \Longrightarrow W = 2$.
   D'altra banda, $W_1 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)$, $W_2 = \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\cos x$.
   Aleshores:
   $$y_G(x) = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}(\ln\cos x)\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$
   $\Longrightarrow$ una solució (amb $c_1 = c_2 = 0$) és $y = -\dfrac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x\dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$.

---

4. Reescrivint el problema de Cauchy $y''(x) = -2x + y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, com un sistema de 1r ordre i aplicant el mètode d'integració numèrica d'Euler amb un pas $h = 0.1$, el valor aproximat de $y(0.3)$ és:
   (a) 3 ☐ (b) 3.03 ☐ (c) 0.58 ☐ (d) 3.088 ☐

   Solució: El sistema de 1r ordre associat és $\left\{\begin{array}{l} y' = z \\ z' = -2x + y \end{array}\right.$ tal que $\begin{array}{c} y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \end{array}$, d'on el valor aproximat de $y(0.3)$ es calcula per

i	x_i	$y_i = y_{i-1} + hz_{i-1}$	$z_i = z_{i-1} + h(-2x_{i-1} + y_{i-1})$
$i = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 3$	$z_0 = 0$
$i = 1$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 3$	$z_1 = 0.3$
$i = 2$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 3.03$	$z_2 = 0.58$
$i = 3$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 3.088$	

---

5. Siguin $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ dues solucions del sistema de 1r ordre $\vec{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{Y}(t)$, $t > 0$. Si denotem per $W(t)$ el wronskià de $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ i sabem que $W(1) = 1$, llavors:

   (a) $W(t) = te^{t-1}$ ☐ (b) $W(t) = ate^t$, $a > 0$ qualsevol ☐
   (c) $W(t) = t + \ln t$ ☐ (d) $W(t) = te^t$ ☐

   Solució: Pel teorema de Liouville sabem que
   $$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{traça} A(s)ds} = W(1)e^{\int_1^t +(\frac{1}{s}+1)ds} = e^{\ln s + s\big]_1^t} = e^{\ln t + t - 1} = te^{t-1}$$

Equacions diferencials **Codi: 22701** **C**

Temps: 1 hora 30 Octubre 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:**

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Considereu el problema de valor inicial per a unes oscil.lacions forçades esmorteïdes:

$$\begin{cases} x'' + ax' + x = f(t) \\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

essent $a > 0$. Si definim l'energia total com la funció $E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2$, la condició per tal que $E'(0) < 0$, és:

(a) $f'(0) > a$ ☐ (b) $f(0) > 0$ ☐ (c) $f(0) < a$ ☐ (d) $f'(0) < 0$ ☐

Solució:

$$\begin{aligned} E'(t) &= x'(t)x''(t) + x(t)x'(t) = x'(t)[f(t) - ax'(t) - x(t)] + x'(t)x(t) \\ &= x'(t)[f(t) - ax'(t)]\,. \end{aligned}$$

Per tant $E'(0) = x'(0)[f(0) - ax'(0)] = [f(0) - a] < 0 \iff f(0) < a$.

---

2. Una solució de l'equació diferencial ordinària $y'' + 4y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, és:

(a) $y = 2x\cos 2x + \frac{x}{4}\sin 2x + 2\ln(\cos x)$ ☐
(b) $y = x^2 \sin 2x + [\cos 2x + x\sin 2x]\ln(\cos x)$ ☐
(c) $y = -\frac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x\frac{\ln(\cos x)}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$ ☐
(d) $y = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + (\cos 2x)\ln(\cos x)$ ☐

Solució: $y'' + 4y = \tan x \Longrightarrow$ un conjunt fonamental de l'equació diferencial ordinària homogènia associada és: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x \Longrightarrow W = 2$.
D'altra banda, $W_1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$, $W_2 = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\cos x$.
Aleshores:

$$y_G(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}(\ln\cos x)\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$\Longrightarrow$ una solució (amb $c_1 = c_2 = 0$) és $y = -\frac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x\frac{\ln(\cos x)}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$.

---

3. Reescrivint el problema de Cauchy $y''(x) = -2x + y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, com un sistema de 1r ordre i aplicant el mètode d'integració numèrica d'Euler amb un pas $h = 0.1$, el valor aproximat de $y(0.3)$ és:
(a) 0.58 ☐ (b) 3.03 ☐ (c) 3.088 ☐ (d) 3 ☐

<u>**Solució**</u>: El sistema de 1r ordre associat és $\left\{\begin{array}{l} y' = z \\ z' = -2x + y \end{array}\right.$ tal que $\begin{array}{l} y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \end{array}$, d'on el valor aproximat de $y(0.3)$ es calcula per

i	x_i	$y_i = y_{i-1} + hz_{i-1}$	$z_i = z_{i-1} + h(-2x_{i-1} + y_{i-1})$
$i = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 3$	$z_0 = 0$
$i = 1$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 3$	$z_1 = 0.3$
$i = 2$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 3.03$	$z_2 = 0.58$
$i = 3$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 3.088$	

---

4. Siguin $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ dues solucions del sistema de 1r ordre $\vec{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}(t)$, $t > 0$. Si denotem per $W(t)$ el wronskià de $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ i sabem que $W(1) = 1$, llavors:

(a) $W(t) = t + \ln t$ ☐ (b) $W(t) = ate^t$, $a > 0$ qualsevol ☐
(c) $W(t) = te^t$ ☐ (d) $W(t) = te^{t-1}$ ☐

<u>**Solució:**</u> Pel teorema de Liouville sabem que

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{traça} A(s)ds} = W(1)e^{\int_1^t +(\frac{1}{s}+1)ds} = e^{\ln s + s\big]_1^t} = e^{\ln t + t - 1} = te^{t-1}$$

---

5. Totes les solucions periòdiques de l'equació $x'' + 4x = \cos(\pi t)$, són:

(a) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐
(b) $x(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐
(c) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐
(d) $x(t) = \dfrac{-1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

<u>**Solució:**</u> $x'' + 4x = \cos \pi t \Longrightarrow p_0 = \pi$, $p = 2 \Longrightarrow$ existeix una única solució periòdica i té període 2.
Resolent l'equació diferencial ordinària homogènia associada, tenim que $x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.
Pel mètode del polinomi anul.lador trobem que $x_p(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$. Com $x_p(t)$ és 2-periòdica i només hi ha una solució 2-periòdica, aquesta és la solució buscada.

Equacions diferencials **Codi: 22701** **D**

Temps: 1 hora 30 Octubre 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:** ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Totes les solucions periòdiques de l'equació $x'' + 4x = \cos(\pi t)$, són:

   (a) $x(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

   (b) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐

   (c) $x(t) = \dfrac{-1}{4-\pi^2}\cos \pi t$ ☐

   (d) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$, on A i B són constants ☐

   Solució: $x'' + 4x = \cos \pi t \Longrightarrow p_0 = \pi,\ p = 2 \Longrightarrow$ existeix una única solució periòdica i té període 2.
   Resolent l'equació diferencial ordinària homogènia associada, tenim que $x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.
   Pel mètode del polinomi anul.lador trobem que $x_p(t) = \dfrac{1}{4-\pi^2}\cos \pi t$. Com $x_p(t)$ és 2-periòdica i només hi ha una solució 2-periòdica, aquesta és la solució buscada.

---

2. Considereu el problema de valor inicial per a unes oscil.lacions forçades esmorteïdes:
$$\begin{cases} x'' + ax' + x = f(t) \\ x(0) = 0\,,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$
   essent $a > 0$. Si definim l'energia total com la funció $E(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2$, la condició per tal que $E'(0) < 0$, és:

   (a) $f(0) > 0$ ☐ (b) $f(0) < a$ ☐ (c) $f'(0) < 0$ ☐ (d) $f'(0) > a$ ☐

   Solució:
$$\begin{aligned} E'(t) &= x'(t)x''(t) + x(t)x'(t) = x'(t)[f(t) - ax'(t) - x(t)] + x'(t)x(t) \\ &= x'(t)[f(t) - ax'(t)]\,. \end{aligned}$$
   Per tant $E'(0) = x'(0)[f(0) - ax'(0)] = [f(0) - a] < 0 \Longleftrightarrow f(0) < a$.

---

3. Siguin $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ dues solucions del sistema de 1r ordre $\vec{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}(t)$, $t > 0$. Si denotem per $W(t)$ el wronskià de $\vec{Y}_1(t)$, $\vec{Y}_2(t)$ i sabem que $W(1) = 1$, llavors:

   (a) $W(t) = ate^t$, $a > 0$ qualsevol ☐ (b) $W(t) = te^t$ ☐
   (c) $W(t) = te^{t-1}$ ☐ (d) $W(t) = t + \ln t$ ☐

   Solució: Pel teorema de Liouville sabem que
   $$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \text{traça} A(s)ds} = W(1)e^{\int_1^t +(\frac{1}{s}+1)ds} = e^{\ln s + s\big]_1^t} = e^{\ln t + t - 1} = te^{t-1}$$

---

4. Reescrivint el problema de Cauchy $y''(x) = -2x + y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, com un sistema de 1r ordre i aplicant el mètode d'integració numèrica d'Euler amb un pas $h = 0.1$, el valor aproximat de $y(0.3)$ és:
   (a) 3.03 ☐ (b) 3.088 ☐ (c) 3 ☐ (d) 0.58 ☐

   Solució: El sistema de 1r ordre associat és $\begin{cases} y' = z \\ z' = -2x + y \end{cases}$ tal que $\begin{matrix} y(0) = 3 \\ z(0) = 0 \end{matrix}$, d'on el valor aproximat de $y(0.3)$ es calcula per

i	x_i	$y_i = y_{i-1} + hz_{i-1}$	$z_i = z_{i-1} + h(-2x_{i-1} + y_{i-1})$
$i = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 3$	$z_0 = 0$
$i = 1$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 3$	$z_1 = 0.3$
$i = 2$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 3.03$	$z_2 = 0.58$
$i = 3$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 3.088$	

---

5. Una solució de l'equació diferencial ordinària $y'' + 4y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, és:

   (a) $y = x^2 \sin 2x + [\cos 2x + x \sin 2x] \ln(\cos x)$ ☐
   (b) $y = -\dfrac{x}{2} \cos 2x + \sin 2x \dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$ ☐
   (c) $y = \dfrac{1}{4} \sin 2x - \dfrac{x}{2} \cos 2x + (\cos 2x) \ln(\cos x)$ ☐
   (d) $y = 2x \cos 2x + \dfrac{x}{4} \sin 2x + 2 \ln(\cos x)$ ☐

   Solució: $y'' + 4y = \tan x \Longrightarrow$ un conjunt fonamental de l'equació diferencial ordinària homogènia associada és: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x \Longrightarrow W = 2$.
   D'altra banda, $W_1 = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)$, $W_2 = \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{1}{2} \ln \cos x$.
   Aleshores:
   $$y_G(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} (\ln \cos x) \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$$
   $\Longrightarrow$ una solució (amb $c_1 = c_2 = 0$) és $y = -\dfrac{x}{2} \cos 2x + \sin 2x \dfrac{\ln(\cos x)}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$.