

Equacions Diferencials

Codi: 22701 **C**

Temps: 1 hora

Test

31 d'Octubre de 2001

NOM:
COGNOMS:
DNI:
GRUP:

NOTA:

Marqueu amb la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Sigui $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ una solució d'un sistema lineal $n \times n$ a coeficients constants $X' = AX$ tal que $x_1(t) = 4te^{2t} \sin t + 1 - t + 5t^2 - 6t^3e^{2t}$. Podem afirmar que:

- (a) $n = 11$. (b) $n \neq 11$.
(c) $n \geq 11$. (d) $n \leq 11$.

Resolució: Comencem observant que:

- Perquè aparegui el terme $4te^{2t} \sin t$, és necessari que els nombres complexos $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ siguin valors propis de A de multiplicitat major o igual que dos.
- Perquè aparegui el terme $1 - t + 5t^2$, és necessari que el nombre $\lambda_3 = 0$ sigui un valor propi de A de multiplicitat major o igual que tres.
- Perquè aparegui el terme $-6t^3e^{2t}$, és necessari que el nombre $\lambda_4 = 2$ sigui un valor propi de A de multiplicitat major o igual que quatre.

Per tant: $n =$ suma de multiplicitats de tots els valors propis majors o iguals que $2+2+3+4 = 11$.

2. Quin és el nombre de màxims relatius que presenta la solució $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, del problema de Cauchy $x'' + 3x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$?

- (a) Cap. (b) Un.
(c) Dos. (d) Infinit.

Resolució: Es tracta d'una equació del tipus $x'' + 2kx' + \omega^2x = 0$ amb $k = 3/2$, $\omega = 1$. Com que $k > \omega$, es tracta d'una oscil·lació lliure sobre-esmorteïda. Per tant $x(t)$ compleix que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, i oscil·la com a molt una vegada. Com que $x(0) > 0$, $x'(0) > 0$ i el límit és 0, tindrà un únic màxim relatiu.

3. Considereu l'equació diferencial ordinària $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, amb $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ funcions contínues en un interval I i $a_2(x) \neq 0, \forall x \in I$. Siguin y_1, y_2 dues solucions d'aquesta equació i $W(y_1, y_2) \equiv W$ el seu wronskià. Llavors es compleix:

- (a) $W = C \exp(-\int a_0(x) + a_1(x) + a_2(x)dx), C \in \mathbb{R}$.
- (b) $W = C \exp(-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx), C \in \mathbb{R}$.
- (c) $W = C \exp(-\int \frac{a_0(x) + a_1(x)}{a_2(x)}dx), C \in \mathbb{R}$.
- (d) $W = C \exp(-\int a_0(x)a_1(x)a_2(x)dx), C \in \mathbb{R}$.

Resolució: Fem el canvi $y_1 = y, y_2 = y'$ i es té el sistema lineal

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1 - \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2 \end{cases} \iff y' = Ay \text{ on } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

Llavors pel teorema de Liouville, $W = e^{\int \text{traça } A dx} = e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$.

4. Sigui $y_1 = x^2$ una solució de l'equació diferencial ordinària homogènia $x^2y'' - 2y = 0$. La solució general, per a $x > 0$ de l'equació diferencial ordinària no homogènia $x^2y'' - 2y = x^3e^x$, és:

- (a) $y = c_1x^2 + c_2x^3 + (1/x) + e^x(x + (2/x) - 2)$.
- (b) $y = c_1x^2 + c_2(1/x) + e^x(x + (2/x))$.
- (c) $y = c_1x^2 + c_2(1/x) + e^x(x + (2/x) - 2)$.
- (d) $y = c_1x^2 + c_2x^3 + e^x(x + (2/x))$.

Resolució: Si $y_1 = x^2$, una segona solució de l'edo homogènia, linealment independent amb y_1 (pel mètode de reducció de l'ordre) és $y_2 = 1/x$. Per tant $y_h = c_1x^2 + c_2(1/x)$.

D'altra banda agafant $y_p = e^x(x + (2/x) - 2)$, derivant i substituint queda:

$$x^2y_p'' - 2y_p = x^3e^x + (4e^x/x) + 2xe^x - 4e^x - 2xe^x - (4e^x/x) + 4e^x = x^3e^x.$$

5. Pel problema de valor inicial $y'(x) = \alpha y^2(x) + x, y(0) = 0$, en què α és un paràmetre real, considereu les aproximacions de Picard $y_0(x), y_1(x)$ i $y_2(x)$. El valor de α per al qual $y_2(1) = 0$, és:

- (a) $\alpha \leq -20$. (b) $-20 < \alpha \leq 0$.
- (c) $0 < \alpha \leq 20$. (d) $20 < \alpha$.

Resolució:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0; & y_1(x) &= \int_0^x s ds = \frac{1}{2}x^2; \\ y_2(x) &= \int_0^x \left\{ \alpha \left(\frac{1}{2}s^2 \right)^2 + s \right\} ds = \frac{\alpha}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^2 \\ y_2(1) &= \frac{\alpha}{20} + \frac{1}{2}, & \frac{\alpha}{20} + \frac{1}{2} &= 0 \implies \boxed{\alpha = -10} \end{aligned}$$