

Equacions Diferencials

Codi: 22701 **B**

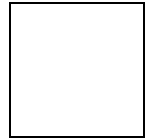
Temps: 1 hora

Test (10 punts)

4 de Novembre de 1999

NOM:
COGNOMS:
DNI:
GRUP:

NOTA:



Marqueu amb la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. L'equació diferencial ordinària $y''' - y'' - y' + y = xe^x$ té alguna solució de la forma:

- (a) $y = Axe^x + Bx^2e^x + Cx^3e^x$. (b) $y = Ae^x + Bxe^x$.
(c) $y = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-x}$. (d) $y = Axe^x$.

Solució: El polinomio característico es $P(m) = m^3 - m^2 - m + 1 = (m - 1)^2(m + 1)$, cuyas raíces son $m_1 = 1$ (doble) y $m_2 = -1$ (simple). Así pues, la solución general de la ecuación homogénea es $y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$.

El polinomio $P_1(m) = (m - 1)^2$ anula al término no homogéneo $g(x) = xe^x$. Por tanto, la ecuación no homogénea tiene una solución particular de la forma $y_p(x) = c_4x^2e^x + c_5x^3e^x$. No se necesita determinar el valor exacto de los coeficientes c_4 y c_5 . Basta observar que no pueden ser simultáneamente nulos; es decir, que $(c_4, c_5) \neq (0, 0)$.

Entonces, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4x^2e^x + c_5x^3e^x,$$

donde c_1, c_2, c_3 son libres y $(c_4, c_5) \neq (0, 0)$. Por tanto, la respuestas (b), (c) y (d) son falsas.

Esto prueba que la respuesta correcta es (a).

2. L'ordre mínim que ha de tenir una equació diferencial ordinària lineal homogènia i a coeficients constants, per tal que tingui $x, 1, x^2e^{-x}, e^{-x} \cos x, xe^{-x} \sin x$ com a solucions, és:

- (a) 5. (b) 8. (c) 9. (d) 7.

Solució: Tenemos las siguientes correspondencias entre funciones y polinomios anuladores:

- $P_1(m) = m^2$ anula a $y_1(x) = x$,
- $P_2(m) = m$ anula a $y_2(x) = 1$,
- $P_3(m) = (m + 1)^3$ anula a $y_3(x) = x^2e^{-x}$,
- $P_4(m) = m^2 + 2m + 2$ anula a $y_4(x) = e^{-x} \cos x$, y
- $P_5(m) = (m^2 + 2m + 2)^2$ anula a $y_5(x) = xe^{-x} \sin x$.

El polinomio $P(m) = m^2(m + 1)^3(m^2 + 2m + 2)^2$ es el mínimo común múltiplo de los polinomios $P_1(m), \dots, P_5(m)$; luego $P(m)$ anula a las funciones $y_1(x), \dots, y_5(x)$ y cualquier otro polinomio que las anule es múltiplo de $P(m)$.

Por tanto, el orden mínimo que tiene una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea y a coeficientes constantes, para que las funciones $y_1(x), \dots, y_5(x)$ sean soluciones suyas, es igual al grado del polinomio $P(m)$; es decir, nueve. De hecho, la ecuación diferencial es $P(D)y = 0$.

Esto prueba que la respuesta correcta es (c).

3. Considerem una molla vertical amb una massa d'1 Kg, amb constant de contracció $k = 4$ N/m i que es mou en un medi amb fregament $r > 0$. L'equació del seu moviment serà, per tant $x''(t) + rx'(t) + 4x(t) = g$ ($g =$ gravetat terrestre). Aleshores, el moviment de la molla
- (a) És sempre periòdic de període mínim $p = 2\pi$.
 - (b) És sempre periòdic de període mínim $p = \pi/2$.
 - (c) Tendeix a ser constant i igual a g .
 - (d) Tendeix a ser constant i igual a $g/4$.

Solución: Estamos ante la ecuación de una oscilación amortiguada (ya que interviene la fricción) y forzada (pues actua la gravedad). Del teorema de las oscilaciones forzadas amortiguadas, deducimos que la ecuación tiene una única solución periódica (el régimen permanente) y que el movimiento del muelle siempre tiende a este régimen permanente (paso del régimen transitorio al régimen permanente). Por tanto, las respuestas (a) y (b) son falsas.

Para distinguir entre (c) y (d) basta observar que $x(t) \equiv g$ **no** es solución de la ecuación $x'' + rx' + 4x = g$, mientras que $x(t) \equiv g/4$ **si** lo es. La respuesta correcta es (d).

4. Suposem que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ és solució de (1): $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ i considerem l'equació (2): $y'' + a_1y' + a_0y = 0$. Aleshores:
- (a) $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són solució de (2).
 - (b) $x_1(t)$ és solució de (2), però $x_2(t)$ no té perquè ser solució de (2).
 - (c) $x_2(t)$ és solució de (2), però $x_1(t)$ no té perquè ser solució de (2).
 - (d) Ni $x_1(t)$ ni $x_2(t)$ tenen perquè ser solució de (2).

Solución: Empezamos por la primera función. Del sistema (1) deducimos que $x'_1 = -a_0x_2$, luego $x''_1 = -a_0x'_2 = -a_0a_1x_2 + a_0a_1x_2$ y, por tanto, resulta que:

$$x''_1 + a_1x'_1 + a_0x_1 = -a_0x_1 + a_0a_1x_2 - a_0a_1x_2 + a_0x_1 = 0.$$

A continuación, analizamos la segunda función. Del sistema (1) deducimos que $x'_2 = x_1 - a_1x_2$, luego $x''_2 = x'_1 - a_1x'_2 = -a_0x_2 - a_1x_1 + a_1^2x_2$ y, por tanto, resulta que:

$$x''_2 + a_1x'_2 + a_0x_2 = -a_0x_2 - a_1x_1 + a_1^2x_2 + a_1x_1 - a_1^2x_2 + a_0x_2 = 0.$$

Así pues, tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ son soluciones de la ecuación (2). La respuesta correcta es (a).

5. Considerem el problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ per a $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. La fórmula de l'error per a les aproximacions de Picard diu que: $\sup_{-a < x < a} |y_n(x) - y(x)| \leq ML^n \frac{(2a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Calculeu en aquest cas M i L i digueu quina de les afirmacions següents és certa.
- (a) $M = 2, L = 4$.
 - (b) $M = 4, L = 4$.
 - (c) $M = 2, L = 2$.
 - (d) $M = 4, L = 2$.

Solución: La respuesta correcta es (b), ya que

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B_2(0, 0)\} = \max\{x^2 + y^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} = 4,$$

$$L = \max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| : (x, y) \in B_2(0, 0)\right\} = \max\{|2y| : x^2 + y^2 \leq 4\} = 4.$$