**Equacions Diferencials** **Codi: 22701** **A**

Temps: 55 minuts 29 de Març de 2007

---

## Test

| | | |
|---|---|---|
| **NOM:** | ......................................... | |
| **COGNOMS:** | ......................................... | |
| **DNI:** | ......................................... | |
| **GRUP:** | ......................................... | **NOTA:** |

**1.** Considereu l'equació diferencial ordinària $x''+\dfrac{\omega^2}{9}x=\cos^2(\beta t)$. Doneu una condició necessària i suficient que han de satisfer $\omega$ i $\beta$ per tal que l'equació diferencial ordinària no tingui cap solució periòdica.

**Resolució:** $p_0=\dfrac{2\pi}{\omega/3}=\dfrac{6\pi}{\omega}$, $p=\left\{\text{període de } b(t)=\cos^2(\beta t)=\dfrac{1-\cos(2\beta t)}{2}\right\}=\dfrac{\pi}{\beta}$.

No existeix solució periòdica $\Longleftrightarrow \dfrac{p}{p_0}=\dfrac{\omega}{6\beta}\in\mathbb{N}$ (o sigui, $\omega=6\beta n$, amb $n\in\mathbb{N}$) i $\displaystyle\int_0^p b(t)\cos\left(\frac{\omega}{3}t\right)dt\neq 0$ o bé $\displaystyle\int_0^p b(t)\sin\left(\frac{\omega}{3}t\right)dt\neq 0$.

Anem a estudiar les integrals:

$$\int_0^p b(t)\cos\left(\frac{\omega}{3}t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/\beta}(1-\cos(2\beta t))\cos(2\beta nt)dt\neq 0\Longleftrightarrow n=1$$

$$\int_0^p b(t)\sin\left(\frac{\omega}{3}t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/\beta}(1-\cos(2\beta t))\sin(2\beta nt)dt=0\,,\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}..$$

En conseqüència, no existeix solució periòdica $\Longleftrightarrow \omega=6\beta$.

**Nota:** Recordem que

$$\int_0^T\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=0\,,\ \forall\, n,m\in\mathbb{Z}$$

$$\int_0^T\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt\begin{cases}=0 & \forall\, n,m\in\mathbb{Z}\\ \neq 0 & \text{si } n=m\end{cases}$$

---

**2.** Considereu l'equació $y''+t(\cos t)y=\sin t$ amb condicions inicials $y(0)=0$, $y'(0)=a$. Si notem per $(y(t),z(t))$ la solució del sistema de primer ordre associat, el valor de $a$ que fa que a la primera iteració de Picard $z_1(t)=-\cos t$, és:

**Resolució:** Si $Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$, amb $z=y'\Longrightarrow\begin{cases}Y'=F(t,Y)=\begin{pmatrix}z\\ \sin t-t(\cos t)y\end{pmatrix}\\ Y(0)=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}\end{cases}\Longrightarrow$

$$\begin{cases}Y_0=Y_0(t)=\begin{pmatrix}y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}\\ Y_{n+1}(t)=Y_0+\displaystyle\int_0^t F(s,Y_n(s))ds,\quad\forall\, n\geq 1\end{cases}\Longrightarrow y_0=0,\ \ z_0=a;\ Y_1(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\z_1(t)\end{pmatrix}=$$

$$=Y_0+\int_0^t F(s,Y_0)ds=\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}z_0\\ \sin s-s\cdot\cos s\cdot y_0\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}a\\ \sin s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}at\\ a-\cos t+1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{array}{l}y_1(t)=at\\ z_1(t)=a+1-cost\end{array}$$

En conseqüència, $z_1(t)=-\cos t\Longleftrightarrow a+1=0\Longleftrightarrow a=-1$.

---

**3.** Trobeu l'equació diferencial ordinària lineal homogènia i a **coeficients constants** d'ordre mínim que té les funcions $y_1(x) = e^x$ i $y_2(x) = x$ com a solucions.

**Resolució:**

$$\left.\begin{array}{l}\text{El polinomi } P_1(D) = D - 1 \text{ anul.la } y_1(x) = e^x \\ \text{El polinomi } P_2(D) = D^2 \text{ anul.la } y_2(x) = x\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow P(D) = mcm[P_1(D), P_2(d)] = D^2[D-1]$ anul.la $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Per tant, l'equació diferencial ordinària és $P(D)y = 0$; $(D^3 - D^2)y = 0$, $y''' - y'' = 0$.

---

**4.** Trobeu l'equació diferencial ordinària lineal homogènia d'ordre 2 que té les funcions $y_1(x) = e^x$ i $y_2(x) = x$ com a solucions.

**Resolució:** Busquem una equació diferencial ordinària d'ordre dos, del tipus $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$$\left.\begin{array}{l}y_1(x) = e^x \text{ solució} \Longrightarrow 1+\text{P(x)}+\text{Q(x)}=0 \\ y_2(x) = x \text{ solució} \Longrightarrow \quad \text{P(x)}+\text{Q(x)}=0\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} P(x) = -\dfrac{x}{x-1} \\ Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\end{array} \Longrightarrow \text{L'equació diferencial ordinària és } (x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

---

**5.** Trobeu la solució del problema de Cauchy: $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$, $y(0) = 17/8$; $y'(0) = 11/12$.

**Resolució:** Busquem la solució de la part homogènia: el polinomi característic és $m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow$ arrels: $m_{1,2} = -1, 2 \Longrightarrow y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$.
Busquem ara una solució particular: $P_1(m) = m^2 - 4$ anul.la $g(x) = \cosh 2x = (e^{2x} + e^{-2x})/2$.

Taula $P(m)P_1(m) = (m-2)^2(m+2)(m+1)$

| Arrels | Mult. | Funcions |
|---|---|---|
| 2 | 2 | $e^{2x}$, $xe^{2x}$ |
| -2 | 1 | $e^{-2x}$ |
| -1 | 1 | $e^{-x}$ |

$\Longrightarrow y_p(x) = c_3xe^{2x} + c_4e^{-2x}$ és un candidat a solució particular.

Imposant que $y_p(x)$ compleix l'equació diferencial ordinària , veiem que $c_3 = 1/6$ i $c_4 = 1/8$.
Imposant que $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ compleix les condicions inicials, veiem que $c_1 = c_2 = 1$.
Per tant, $y(x) = \dfrac{2}{3}e^{-x} + \left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{x}{6}\right)e^{2x} + \dfrac{1}{8}e^{-x}$.

---