Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 50 minuts **18 de Juny de 2008**

Test

1. Demostreu que les funcions $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ són linealment independents a l'interval $(-1, 1)$. Existeixen funcions $p(x)$ i $q(x)$ contínues a $[-1, 1]$ de manera que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ siguin un conjunt fonamental de solucions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$?

   Resolució: Suposem $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1, 1) \Longleftrightarrow c_1x + c_2x^2 = 0$, $\forall\, x \in (-1, 1)$. Si $x \neq 0$ llavors $c_1 = -c_2x$. Així doncs, si volem c_1 constant com a funció de x llavors cal $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\}$ linealment independents. Si calculem el seu wronskià $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$, s'anul·la si $x = 0$. Això implica que no poden ser un conjunt fonamental de solucions de l'equació diferencial ordinària lineal i homogènia per a cap tria de $p(x)$ i $q(x)$.

---

2. Siguin $x_1(t)$, $x_2(t)$ dues solucions linealment independents de l'equació diferencial ordinària $x'' - tx' - g(t)x = 0$. Considereu $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$ i suposeu que $W(0) = 1$. Doneu el valor de $W(\sqrt{2})$.

   Resolució: Escrivim l'equació diferencial ordinària com un sistema de 1er ordre, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, amb $y = x'$ i $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g(t) & t \end{pmatrix}$. Llavors usant la fórmula de Liouville:

$$w(\sqrt{2}) = w(0)\exp\left(\int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{tr} A(s)ds\right) = 1 \cdot \exp\left(\int_0^{\sqrt{2}} s\, ds\right) = e^1 = e\,.$$

---

3. L'equació diferencial $x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0$ té una solució en sèrie de potències de la forma $y(x) = x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$. Trobeu c_5.

Resolució: $x^2[2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots] + (x^2 - 2x)[2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \cdots]+$
$+\, 2(x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots) = 0$

$0(x^2):\ 2 - 4 + 2 = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0$

$0(x^3):\ 6c_3 + 2 - 6c_3 + 2c_3 = 0 \Longleftrightarrow c_3 = -1$

$0(x^4):\ 12c_4 + 3c_3 - 8c_4 + 2c_4 = 0 \Longleftrightarrow c_4 = -\dfrac{1}{2}c_3 = \dfrac{1}{2}$

$0(x^5):\ 20c_5 + 4c_4 - 10c_5 + 2c_5 = 0 \Longleftrightarrow c_5 = -\dfrac{1}{3}c_4 = -\dfrac{1}{6}$

---

4. Considereu el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + xy^2 \\ y' = 3x - 3y + y^3 \end{cases}$$

Estudieu l'estabilitat de l'origen considerant funcions de Liapunov del tipus: $V(x, y) = ax^2 + by^2$.

Resolució: $f = -x - 2y + xy^2,\ \ g = 3x - 3y + y^3$.

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{\partial V}{\partial y}g = 2ax(-x - 2y + xy^2) + 2by(3x - 3y + y^3) = \\ &= -2ax^2 + (6b - 4a)xy - 6by^2 + 2ax^2y^2 + 2by^4 \end{aligned}$$

Anul·lem el terme en $x \cdot y$ de W: $a = 3,\ b = 2 \Longrightarrow V = 3x^2 + 2y^2$ definida positiva en $(0, 0)$.

$W = -6x^2 - 12y^2 + 6x^2y^2 + 4y^4 = -6x^2(1 - y^2) - 4y^2(3 - y^2) < 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ és prou proper a $(0, 0)$ per tal que $1 - y^2 > 0$ i $3 - y^2 > 0$. Per tant, W és definida negativa en $(0, 0)$ i l'origen és asimptòticament estable.