Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **8 de Juny de 2007**

Test

1. Considereu el sistema $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$. Si $X(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quant val $X(1)$?

   Resolució: Valors propis: $\lambda = 2$ (doble); $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Prenent $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$; $t_0 = 3$; $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 = e^{2(t-3)} \begin{pmatrix} 1 & t-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2(t-3)} \begin{pmatrix} t-2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X(1) = e^{-4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

2. Considereu el problema $x'' + \omega^2 x = 0$, amb $x(0) = 0$ i $x'(L) = 0$, on $\omega > 0$ i $L > 0$. Determineu per a quins valors de ω es té una solució no trivial i determineu la seva forma.

   Resolució: $x'' + \omega^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Imposant les condicions de contorn
   - $0 = x(0) = c_1$
   - $0 = x'(L) = c_2 \omega \cos(\omega L) \stackrel{c_2 \neq 0}{\Longrightarrow} \cos(\omega L) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_k = \dfrac{(\pi/2) + \pi k}{L}, \;\; k \geq 0$

$$\Longrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Valors propis: } \;\omega_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2L} \\ \text{Forma solucions pròpies: } \; x_k(t) = \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}\right) \end{array} \right\} k \geq 0$$

---

3. Estudieu, *usant el mètode de les funcions de Liapunov* amb una funció del tipus $V(x, y) = ax^2 + by^2$, l'estabilitat del punt d'equilibri $(0, 0)$ del sistema no lineal $\left\{ \begin{array}{l} x' = -2x + y + xy^2 \\ y' = -7x - 2y - 7x^2 y \end{array} \right.$.

   Resolució: $W(x, y) = \dfrac{\partial V}{\partial x} x' + \dfrac{\partial V}{\partial y} y' = 2ax(-2x + y + xy^2) + 2by(-7x - 2y - 7x^2 y) = -4ax^2 + (2a - 14b)xy - 4by^2 (2a - 14b)x^2 y^2$.
   Interessa que $2a = 14b$, $a, b > 0$; $\Rightarrow$ si per exemple $a = 7$, $b = 1$, aleshores es té $V(x, y) = 7x^2 + y^2$ definida positiva i $W(x, y) = -28x^2 - 4y^2$ definida negativa. El punt d'equilibri és asimptòticament estable.

---

4. Considereu un sistema $X' = AX$, on A té $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ com a vector propi de valor propi $-1+3i$. Sigui $(x(t),\, y(t))$ la solució amb condicions inicials $(x(0),\, y(0)) = (1,\, 1)$. Quant temps triga $(x(t),\, y(t))$ en tornar a tallar la bisectriu $x = y \quad (x \geq 0)$.

Resolució: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$; i $J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -1+3i & 0 \\ 0 & -1-3i \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\phi_{\mathbb{C}}(t) = Se^{tJ_{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3t + i\sin 3t & 0 \\ 0 & \cos 3t - i \sin 3t \end{pmatrix} e^{-t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3t + i\sin 3t & \cos 3t - i\sin 3t \\ -\sin 3t + i\cos 3t & -\sin 3t - i\cos 3t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$\Rightarrow \phi_{\mathbb{R}}(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} e^{-t}$

$\Rightarrow X(t) = \phi_{\mathbb{R}}(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t \\ -c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t \end{pmatrix} e^{-t}.$

Imposem condicions inicials: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ -\sin 3t + \cos 3t \end{pmatrix} e^{-t}$

$\Rightarrow \;\cos 3t + \sin 3t = -\sin 3t + \cos 3t \Rightarrow \sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = k\pi,\ k > 0.$

Si $t = \dfrac{\pi}{3}$, aleshores $X(t) = (-1, 1)e^{-\pi/3}$, que es troba al 3r quadrant. Per tant, és quan $t = \dfrac{2\pi}{3}$ que $X(t)$ torna a tallar la bisectriu al 1r quadrant.

---

5. Sigui $u(x,t) \in C^2((0,1) \times \mathbb{R}^+)$ la solució del problema de valor inicial i de frontera:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \quad x \in (0,1)\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0\,. \end{cases}$$

Definim l'energia d'aquest problema com la funció $\phi(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u^2(x,t)dx$. Demostreu que $\phi(t)$ és decreixent.

Resolució: $\phi'(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 2u(x,t)u_t(x,t)dx = \int_0^1 u\, u_{xx}\, dx = \underbrace{u\, u_x\Big|_0^1}_{\substack{=0 \\ \downarrow \\ u(0,t)=0=u(1,t))}} - \int_0^1 (u_x)^2\, dx = -\int_0^1 u_x(x,t)^2\, dt \leq 0.$