Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **22 de Juny de 2006**

Test

1. Per a l'equació diferencial ordinària $(x-1)^2y''-2x(x-1)y'+2y=0$, calculeu les arrels de l'equació indicial en el punt singular.

   Resolució: L'equació diferencial ordinària normalitzada és $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$, on $P(x)=-\dfrac{2x}{x-1}$, $\quad Q(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$. Aquestes funcions són analítiques excepte en el punt $x_0=1$, que es l'únic punt singular. Els coeficients de l'equació indicial són $p_0=\lim_{x\to1}(x-1)P(x)=-2$, $\quad q_0=\lim_{x\to1}(x-1)^2Q(x)=2$. Així doncs, l'equació indicial és $0=r(r-1)+p_0r+q_0=r^2-3r+2$ i les seves arrels són $r_1=1$ i $r_2=2$.

---

2. Existeixen solucions periòdiques de l'equació diferencial ordinària $x''+\omega^2x=\sin\left(\dfrac{3}{2}\omega t\right)$, $\omega>0$? En cas afirmatiu, trobeu-les i doneu-ne el període.

   Resolució: El període de l'oscil.lació harmònica $x''+\omega^2x=0$ és $p_0=\dfrac{2\pi}{\omega}$. El període del terme no homogeni $b(t)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\omega t\right)$ és $p=\dfrac{4\pi}{3\omega}$. Així doncs, $p/p_0=2/3\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ i segons el Teorema d'existència de solucions periòdiques d'oscil.lacions forçades no esmorteïdes, saben que: 1) Totes les solucions són periòdiques. 2) Una d'elles té període $p=\dfrac{4\pi}{3\omega}$ i 3) Les altres tenen període $3p=\dfrac{4\pi}{\omega}$.
   Solució general: $x(t)=\dfrac{-4}{5\omega^2}\sin\left(\dfrac{3}{2}\omega t\right)+A\cos t+B\sin t$ i prenent $A=B=0$ és la solució p-periòdica.

---

3. Sigui $u(x,t)$ la solució contínua del problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, & x\in(-1,1)\,, \quad t>0 \\ u(x,0)=\sin x & x\in[-1,1] \\ u(1,t)=\dfrac{\sin 1}{1+t^2}\,, & t\ge 0 \\ u(-1,t)=-\dfrac{\sin 1}{1+t^2}\,, & t\ge 0 \end{cases}$$
Quant val el valor màxim i mínim d'u?

Resolució: Siguin $\Sigma=[-1,1]\times\mathbb{R}_+$ i $\partial\Sigma=\partial_0\cup\partial_+\cup\partial_-$, on $\partial_0=\{(x,0):x\in[-1,1]\}$, $\partial_\pm=\{(\pm1,t):t\ge0\}$. Sabem, com la edp es homogènia, que el valor màxim i mínim de la temperatura $u(x,t)$ s'assoleix en la frontera $\partial\Sigma$. Per tant,
$$\max_\Sigma u=\max_{\partial\Sigma}u=\max\left\{\max_{\partial_0}\sin x,\ \sup_{\partial_+}\frac{\sin 1}{1+t^2},\ \sup_{\partial_-}-\frac{\sin 1}{1+t^2}\right\}=\max\{\sin 1,\,\sin 1,\,0\}=\sin 1.$$
$$\min_\Sigma u=\min_{\partial\Sigma}u=\min\left\{\min_{\partial_0}\sin x,\ \inf_{\partial_+}\frac{\sin 1}{1+t^2},\ \inf_{\partial_-}-\frac{\sin 1}{1+t^2}\right\}=\min\{-\sin 1,\,0,\,-\sin 1\}=-\sin 1.$$

---

4. Donat el problema $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin x\,, & x\in\mathbb{R}\,,\quad t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0\end{cases}$, calculeu $u(\pi,\pi)$. (*Indicació:* Feu el canvi $v=u-\sin x$.)

Resolució: $v=u-\sin x \Longrightarrow \begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0 & x\in\mathbb{R},\ t\ge0 \\ v(x,0)=-\sin x & x\in\mathbb{R} \\ v_t(x,0)=0 & x\in\mathbb{R}\end{cases} \underset{\text{D'Alembert}}{\overset{\uparrow}{\Longrightarrow}} v(x,t)=-\frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right]$
$$\Longrightarrow u(x,t)=\sin x-\frac12\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right]\Longrightarrow u(x,t)=\sin\pi=0.$$

---

5. Donat el problema de valors inicials $y''+3y'-y=x$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$, expresseu-lo mitjançant un sistema de primer ordre i calculeu la segona iteració de Picard associada, $Y_2(x)$.

Resolució: Tenim
$$\left.\begin{array}{l} y''+3y'-y=x \\ y(0)=2 \\ y'(0)=-1\end{array}\right\} \underset{Y=\binom{y}{z}}{\xrightarrow{z=y'}} \begin{cases} \binom{y'}{z'}=Y'=F(x,Y)=\binom{z}{y-3z+x} \\ Y(0)=\binom{y(0)}{z(0)}=\binom{2}{-1}=Y_0\end{cases}$$
Picard: $Y_0(x)=Y_0=\binom{2}{-1}$, $Y_{n+1}(x)=Y_0+\displaystyle\int_{x_0}^x F(s,Y_n(s))ds$, $\forall\, n\ge0$
$$\Longrightarrow Y_1(x)=\binom{2}{-1}+\int_0^x\begin{pmatrix} z_0(s) \\ y_0(s)-3z_0(s)+s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} 2-x \\ -1+5x+(x^2/2)\end{pmatrix}$$
$$Y_2(x)=\binom{2}{-1}+\int_0^x\begin{pmatrix} z_1(s) \\ y_1(s)-3z_1(s)+s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} 2-x+5(x^2/2)+(x^3/6) \\ -1+5x-15(x^2/2)-(x^3/2)\end{pmatrix}.$$