

**Test**

1. Sigui  $f(t) = \sin^2(3t/2)$  i anomenem  $p > 0$  el seu període. Considereu l'equació diferencial ordinària

$$x'' + \omega_0^2 x = f(t) \tag{1}$$

Aleshores, els valors de  $\omega_0$  tals que totes les solucions de (1) siguin periòdiques però només una tingui període  $p$ , són:

- (a)  $\omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$         (b)  $\omega_0/3 \in \mathbb{Q}$       
 (c)  $\omega_0/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$         (d)  $\omega_0 \in \mathbb{Z}$

**Solució:** (c)

**Resolució:**  $f(t) = \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1 - \cos(3t)}{2}$ , és periòdica de període  $p = \frac{2\pi}{3}$ . D'altra banda, com  $p_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , perquè totes les solucions siguin periòdiques i només una sigui de període  $p$  ha de passar que

$$\frac{p}{p_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \iff \frac{2\pi/3}{2\pi/\omega_0} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \iff \frac{\omega_0}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

2. Un conjunt de solucions del tipus  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$  del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(2\pi, t) = 0 \end{cases}$$

per a  $x \in (0, 2\pi)$  i  $t \in \mathbb{R}$  és:

- (a)  $\sin(nx) \sin(nt)$ ,  $n \geq 1$ .        (b)  $\sin(\frac{n}{2}x) \sin(\frac{n}{2}t)$ ,  $n \geq 1$ .      
 (c)  $\sin(\frac{n}{2}x) \cos(nt)$ ,  $n \geq 1$ .        (d)  $\cos(nx) \sin(\frac{n}{2}t)$ ,  $n \geq 0$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:** Substituint  $u_n(x, t)$  al problema, obtenim els dos subproblemes

$$(a) \begin{cases} X_n'' = \lambda_n X_n \\ X_n(0) = 0 \\ X_n(2\pi) = 0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} T_n'' = \lambda_n T_n \\ T_n(0) = 0 \end{cases}$$

$\implies X_n(x) = C_1 \sin \frac{n}{2}x$  i  $T_n(x) = C_2 \sin \frac{n}{2}t \implies$  un conjunt de solucions és  $u_n(x, t) = \sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n}{2}t \implies$  (b).

3. Sigui  $h \in C^2(\mathbb{R})$  i  $u(x, y) = e^x h(y)$  és una solució de l'equació en derivades parcials  $u_{xx} + u_{yy} + 2u_y = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ ; aleshores,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y)$ , val:
- (a) 0.  (b)  $+\infty$ .  (c) no existeix.  (d)  $e^x$ .

**Solució:** (a)

**Resolució:**  $u_{xx} + u_{yy} + 2u_y = 0 \iff e^x(h''(y) + 2h'(y) + h(y)) = 0 \iff h''(y) + 2h'(y) + h(y) = 0$ ; per tant  $h(y) = e^{-y}(A + By)$ ,  $A, B \in \mathbb{R} \implies \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^x \cdot e^{-y}(A + By) = 0$ .

4. L'oscil·lador esmorteït  $x'' + (0.1)x' + 9x = 0$  tindrà una amplitud d'oscil·lació  $A(t) = \frac{1}{e^2}A(0)$  ( $A(0) =$  amplitud inicial) en:
- (a)  $t = 0.05e^2$ .  (b)  $t = 40$ .  (c)  $t = 20$ .  (d)  $t = \frac{2\pi}{3}$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:** Tenim que la solució general de l'equació diferencial ordinària  $x'' + 2kx' + \omega^2x = 0$  és de la forma  $x(t) = A(0)e^{-kt} \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t + \varphi)$ , amb  $k = 1/20$  i  $\omega = 3$  (no és necessari calcular  $A(0)$  ni  $\varphi$ ). Per tant  $A(t_0) = A(0)e^{-kt_0}$ . Imposant que  $A(t_0) = e^{-2}A(0) \iff A(0)e^{-t_0/20} = A(0)e^{-2} \iff t_0 = 40$ .

5. Sigui  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Quant val la solució del problema de valor inicial  $x'(t) = Ax(t)$ ,  $x(0) = (1, 1, 1)$ , per a  $t = \pi$ ?
- (a)  $e^\pi(-1, 1, 1)$ .  (b)  $e^\pi(1, 1, 1)$ .  (c)  $e^\pi(1, -1, 1)$ .  (d)  $e^\pi(1, -1, -1)$ .

**Solució:** (d)

**Resolució:** Tenim

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & -i \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \implies e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

La solució buscada és  $x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies x(\pi) = e^\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^\pi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$