Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **29 de Juny de 2004**

Test

1. Podem afirmar que l'equació diferencial ordinària $x'' + \alpha^2 x = \sin t + 3\sin(\beta t)$ amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ té simultàniament solucions periòdiques i no periòdiques si:

   (a) $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ☐
   (b) $\beta \in \mathbb{Q}$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ☐
   (c) $\beta = m/n \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ i $n\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. ☐
   (d) $\beta = m/n \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ i $n\alpha \in \mathbb{N}$. ☐

   Resolució: El periodo de las soluciones de la ecuación homogénea es $p_0 = 2\pi/\alpha$. El término $b(t) = \sin t + 3\sin(\beta t)$ es periódico si y sólo si $\beta \in \mathbb{Q}$, en cuyo caso el periodo de $b(t)$ es $p = \text{m.c.m.}(2\pi, 2\pi/\beta)$. Por tanto:

   - Si $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces $b(t)$ no es periódico y la ecuación no tiene ninguna solución periódica.
   - Si $\beta \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces $p/p_0 \notin \mathbb{Q}$ y la ecuación tiene una única solución periódica.
   - Si $\beta = m/n \in \mathbb{Q}$ y $n\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, entonces $p = 2\pi n$, $p/p_0 = n\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ y todas las soluciones de la ecuación son periódicas.
   - Si $\beta = m/n \in \mathbb{Q}$ y $n\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $p = 2\pi n$, $p/p_0 = n\alpha \in \mathbb{N}$ y todas las soluciones de la ecuación son o bien periódicas o bien no acotadas.

   Así pues, el único caso con soluciones periódicas y no periódicas corresponde a $\beta \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

---

2. Considerem el problema de valor inicial $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t)$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. El valor de $X(\ln 2)$ és:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ☐ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ☐ (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐

   Resolució: Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i J la seva forma de Jordan, verificant que $A = SJS^{-1}$ per a una certa matriu regular S. Aleshores la solució general de la e.d.o. $X' = AX$ es pot expressar de la forma $X(t) = \Phi(t)C = S\mathrm{e}^{tJ}C$ amb $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. El polinomi característic d'A és $p_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, que té per arrels els vaps $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Calculant les dimensions dels seus nuclis associats, dim Nuc$(A-I)$, dim Nuc$(A+I)$, obtenim 2 i 1, respectivament, que coincideixen amb les corresponents multiplicitats algebraiques. Per tant A diagonalitza i $J = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Una base de vectors propis vé donada per

   $$u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (0,1,0) \in \text{Nuc}(A-I), \qquad u_3 = (2,1,-2) \in \text{Nuc}(A+I).$$

   Per tant, la solució general de $X' = AX$ s'escriu $X(t) = S\mathrm{e}^{tD}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.
   Si imposem que les condicions inicials, $X(0) = (1,1,1)$ s'obté $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$, de manera que la solució del nostre problema de Cauchy és $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Aleshores, substituint $t = \ln 2$, obtenim $X(\ln 2) = (2,2,2)$.

   Solució: $(2,2,2)$

---

3. Considerem el problema de valor inicial $y' = \sin x + \cos^2 y$, $y(\pi) = \pi$. Aplicant el mètode d'Euler amb pas $h = \pi/2$ el valor aproximat de $y(3\pi)$ és:
(a) 3π. ☐ (b) π. ☐ (c) 2π. ☐ (d) $3\pi/2$. ☐

Resolució: En aquest cas l'algorisme d'Euler s'escriu:

$$y_0 = y(\pi) = \pi, \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \frac{\pi}{2}\left(\sin x_n + \cos^2 y_n\right)$$

a on $x_n = \pi + nh = \pi + n\pi/2$. Iterant obtenim

$$y_1 = \pi + \tfrac{\pi}{2}(\sin\pi + \cos^2\pi) = \tfrac{3\pi}{2} \qquad y_2 = \tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}(\sin\tfrac{3\pi}{2} + \cos^2\tfrac{3\pi}{2}) = \pi$$
$$y_3 = \pi + \tfrac{\pi}{2}(\sin 2\pi + \cos^2\pi) = \tfrac{3\pi}{2} \qquad y_4 = \tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}(\sin\tfrac{5\pi}{2} + \cos^2\tfrac{3\pi}{2}) = 2\pi.$$

Solució: 2π.

4. Considerem el sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Els valors de μ per als quals l'origen és un node impropi inestable, són:
(a) $\pm\sqrt{20}$. ☐ (b) $-\sqrt{20}$. ☐ (c) $\sqrt{20}$. ☐ (d) 20. ☐

Resolució: Sigui

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imposar que l'origen sigui un node impropi inestable d'aquest sistema és equivalent a imposar que A no diagonalitzi i tingui vap $\lambda > 0$ (doble). El seu polinomi característic és $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mu\lambda + 5$, d'arrels

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 20}}{2}.$$

Si volem que λ sigui doble cal imposar que $\mu = \pm\sqrt{20}$. Si, a més, volem λ positiu cal prendre $\mu = +\sqrt{20}$. Amb aquest valor de μ és immediat comprovar que A no diagonalitza: $\dim \operatorname{Nuc}(A - \lambda_1 I) = 1$, diferent de la seva multiplicitat algebraica (que és 2).

Solució: $\mu = \sqrt{20}$

5. El nombre de solucions del problema de valor a la frontera

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

és:
(a) 1. ☐ (b) infinites. ☐ (c) 0. ☐ (d) 2. ☐

Resolució: La solució general de la e.d.o. $y'' - 2y' + 2y = 0$ és $y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$, amb c_1, c_2 constants qualssevol. Si imposem les condicions de frontera, $y(0) = y(\pi) = 0$, obtenim que $c_2 = 0$ i que c_1 és lliure. Per tant, el nostre PVF té infinites solucions, de la forma $y(x) = c_1 e^x \sin x$ amb $c_1 \in \mathbb{R}$.

Solució: Infinites.