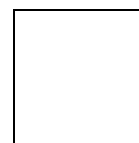


NOM: .....  
 COGNOMS: .....  
 DNI: .....



NOTA:

Marqueu amb  la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Considerem el problema per a l'equació d'ones

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = (2 - x) \sinh x \\ u_t(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases}$$

Llavors, tenim que  $u(1, 1)$  val:

- (a) 0.  (b)  $2/\pi$ .  (c)  $\sinh 1$ .  (d)  $\sinh 2$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:** Fórmula de D'Alembert:  $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$ . En aquest cas:  $c = 1, f(x) = (2 - x) \sinh x, g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), x = 1, t = 1$

$$u(1, 1) = \frac{1}{2}[f(2) + f(0)] + \frac{1}{2} \int_0^2 g(s) ds = \frac{1}{2}[0 + 0] + \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) ds = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \right]_{s=0}^{s=2} = -\frac{1}{\pi} \cos \pi + \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{2}{\pi}.$$

2. Considereu el problema de valors en la frontera

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4\lambda y = 0, & 1 < x < 2 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

amb  $\lambda \in (-\infty, 1)$ . Llavors:

- (a)  $y \neq 0$  si, i només si,  $\lambda \in (-1, 1)$ .  (b)  $y \neq 0$  si, i només si,  $\lambda \in (-\infty, -5)$ .   
 (c)  $y \neq 0$  si, i només si,  $\lambda \in (-2, -1)$ .  (d)  $y \equiv 0$  per a tot  $\lambda \in (-\infty, 1)$ .

**Solució:** (d)

**Resolució:**  $x^2 y'' - 3xy' + 4\lambda y = 0$ . Equació de Cauchy-Euler: busquem  $g(x) = x^m \Rightarrow m(m - 1) - 3m + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{1 - \lambda}$ .

\* Cas  $\lambda < 1$ :  $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = Ax^{m_1} + Bx^{m_2}$

$$\begin{cases} 0 = y(1) = A + B \\ 0 = y(2) = 2^{m_1} A + 2^{m_2} B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^{m_1} & 2^{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu és  $2^{m_2} - 2^{m_1} \neq 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$  No hi ha solucions no trivials.

3. La tercera iteració de Picard, per trobar la solució del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + (\sin x)y = \cos x \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

és:

(a)  $y_3(x) = -3 \sin x + 3x - \cos x + 1$ .       (b)  $y_3(x) = 3 \sin x - 3x - \cos x + 1$ .

(c)  $y_3(x) = 3 \sin x - 3x + \cos x - 1$ .       (d)  $y_3(x) = 3 \sin x + 3x + \cos x - 1$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:**  $z = y' \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = \cos x - 3z - (\sin x)y \end{cases} \Rightarrow Y' = F(x, y) = \begin{pmatrix} z \\ \cos x - 3z - (\sin x)y \end{pmatrix}$ , on  $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ .

Mètode de Picard:  $Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y_n(s)) ds$ ,  $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_n(x) \\ z_n(x) \end{pmatrix}$ .

$y_{n+1}(x) = \int_0^x z_n(s) ds$ ,  $z_{n+1}(x) = \int_0^x [\cos s - y_n(s) \sin s - 3z_n(s)] ds$ .

$\left. \begin{matrix} y_0(x) = 0 \\ z_0(x) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y_1(x) = 0 \\ z_1(x) = \sin x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y_2(x) = 1 - \cos x \\ z_2(x) = \sin x + 3 \cos x - 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_3(x) = 1 - \cos x + 3 \sin x - 3x$

4. Per a l'equació  $x'' + 4x = 1 + \sin(2t)$  podem assegurar que:

(a) Totes les solucions són periòdiques.

(b) No té solucions periòdiques.

(c) Té una única solució periòdica.

(d) Té més d'una solució periòdica.

**Solució:** (b)

**Resolució:**  $x'' + \omega^2 x = b(t)$  oscil·lacions forçades no esmorteïdes amb  $\omega = 2$  i  $b(t) = 1 + \sin 2t$ .

$p = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$  (període de  $b(t)$ );  $p_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ;  $\frac{p}{p_0} = 1 \in \mathbb{Z}$ . Hem de calcular les integrals:

$\int_0^p b(t) \cos 2t dt = \int_0^\pi \cos 2t dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t \sin 2t dt = 0$ .

$\int_0^p b(t) \sin 2t dt = \int_0^\pi \sin 2t dt + \int_0^\pi \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow$  No hi ha solucions periòdiques.

5. La solució general de l'equació diferencial ordinària  $x^2 y'' + xy' + 9(x^2 - (1/4))y = 0$  és:

(a)  $y(x) = c_1 J_{3/2}(3x) + c_2 J_{-3/2}(3x)$ .       (b)  $y(x) = c_1 J_{3/2}(x) + c_2 Y_{3/2}(x)$ .

(c)  $y(x) = c_1 J_{1/2}(3x) + c_2 Y_{1/2}(3x)$ .       (d)  $y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$ .

**Solució:** (a)

**Resolució:**  $x^2 y'' + xy' + 9 \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' + ((3x)^2 - (3/2)^2) y = 0$ .

Fent el canvi de variable  $t = 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} 3$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( 3 \frac{dy}{dt} \right) = 3 \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = 9 \frac{d^2 y}{dt^2}$ ; obtenim

l'equació diferencial ordinària equivalent  $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - (3/2)^2) y = 0$ , que és una equació de Bessel de paràmetre  $\nu = 3/2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow y(t) = c_1 J_{3/2}(t) + c_2 J_{-3/2}(t) \Rightarrow y(x) = c_1 J_{3/2}(3x) + c_2 J_{-3/2}(3x)$ .