

Test Final de Ecuaciones Diferenciales (I. Q.)

Fecha: 19 de junio de 2002

Tiempo: 1 hora



Pregunta 1. Sea $u(x, t)$ una solución de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 1)$, $t > 0$, con condiciones de frontera de tipo Dirichlet $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Sea $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx$ la función energía. Entonces, podemos afirmar que:

- a. $E'(t) = 0$.
- b. $E(t) = 0$.
- c. $E'(t) \geq 0$.
- d. $E'(t) \leq 0$.

Solución: $E(t)$ no puede ser siempre nula, pues es la integral del cuadrado de $u(x, t)$, que no es siempre nula.

Estudiamos su derivada:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= \int_0^1 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= \left[u(x, t) u_x(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_x^2(x, t) dx \\ &= - \int_0^1 u_x^2(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Las propiedades que hemos usado en cada igualdad son: derivada bajo el signo de la integral (primera), la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ (segunda), una integración por partes (tercera) y las condiciones de frontera $u(0, t) = u(1, t) = 0$ (cuarta). $E'(t)$ tampoco puede ser siempre nula, pues es menos la integral del cuadrado de la parcial $u_x(x, t)$, que no es siempre nula.

Pregunta 2. Sea $y(x)$ la solución del problema de valores en la frontera $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases}$. Entonces:

- a. $y(3) = 0$.
- b. $y(3) = 6$.
- c. $y(3) = 2$.
- d. $y(3) = -3$.

Solución: Es una edo de Cauchy-Euler. Al imponer que el monomio $y(x) = x^m$ sea una solución queda

$$0 = x^2 y'' - 2xy' + 2y = m(m-1)x^m - 2mx^m + 2x^m = P(m)x^m.$$

Las raíces del polinomio $P(m) = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$ son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$. Por tanto, la solución general de la edo es $y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} = c_1 x + c_2 x^2$. A continuación, imponemos las condiciones de frontera:

$$c_1 + c_2 = y(1) = 0 \quad 2c_1 + 4c_2 = y(2) = 2.$$

La única solución de este sistema es $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$, luego $y(3) = 3c_1 + 3^2 c_2 = -3 + 9 = 6$.

Pregunta 3. ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene la ecuación $x^2y'' + \lambda x^2y' + (\lambda + x)y = 0$ una solución de la forma $y(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ con $a_1 \neq 0$?

- a. Sólo si $\lambda = 1$.
- b. Sólo si $\lambda = 0$.
- c. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- d. Para ningún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución: Imponemos directamente que la serie $y(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ cumpla la edo:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y'' + \lambda x^2y' + (\lambda + x)y \\ &= \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n + \lambda \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n+1} + \lambda \sum_{n \geq 1} a_n x^n + \sum_{n \geq 1} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{k \geq 2} k(k-1)a_k x^k + \lambda \sum_{k \geq 2} (k-1)a_{k-1} x^k + \lambda \sum_{k \geq 1} a_k x^k + \sum_{k \geq 2} a_{k-1} x^k \\ &= \lambda a_1 x + \sum_{k \geq 2} \left((k^2 - k + \lambda)a_k + (\lambda k - \lambda + 1)a_{k-1} \right) x^k. \end{aligned}$$

Como $\lambda a_1 = 0$ y $a_1 \neq 0$, $\lambda = 0$ es el único candidato, pero debemos comprobar que las otras recurrencias no dan problemas. Si $\lambda = 0$, entonces $a_k = a_{k-1}/(k - k^2)$ para todo $k \geq 2$. El denominador $k - k^2 = k(1 - k)$ no se anula para ningún $k \geq 2$, luego podemos calcular todos los coeficientes a_k , con $k \geq 2$.

Pregunta 4. Sea $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}$. Entonces:

- a. $\Phi(t)$ puede ser una matriz fundamental de un sistema lineal a coeficientes constantes en $\{t > 0\}$.
- b. $\Phi(t)$ puede ser una matriz fundamental de un sistema lineal a coeficientes constantes en $\{t < 0\}$.
- c. $\Phi(t)$ puede ser una matriz fundamental de un sistema lineal a coeficientes constantes en $\{t \neq \pm 1\}$.
- d. $\Phi(t)$ no puede ser una matriz fundamental de un sistema lineal a coeficientes constantes.

Solución: Si $\Phi(t)$ fuera la matriz fundamental en $I \subset \mathbb{R}$ de un sistema lineal (a coeficientes constantes o no), el determinante $W(t) := \det[\Phi(t)]$ debería ser no nulo para todo $t \in I$. Pero $W(t) = e^t(t^2 - 1)$ se anula en $t = \pm 1$. Por tanto, las opciones a y b quedan descartadas.

Para distinguir entre las opciones c y d, imponemos que $\Phi(t)$ sea la solución de un sistema a coeficientes constantes $\dot{X} = AX$ con $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ y obtenemos la igualdad

$$\begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} e^t = \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta & \alpha + \beta t \\ \gamma t + \delta & \gamma + \delta t \end{pmatrix} e^t.$$

Es imposible encontrar una matriz A que cumpla esta igualdad pues las ecuaciones $\alpha t + \beta = t + 1$ y $\alpha + \beta t = 1$ son incompatibles. (Las ecuaciones $\gamma t + \delta = 1$ y $\gamma + \delta t = t + 1$ también.)

[Otra forma mucho más rápida de resolver esta pregunta consiste en observar que si $\Phi(t)$ fuera la matriz fundamental en $I \subset \mathbb{R}$ de un sistema lineal a coeficientes constantes, podemos suponer que $I = \mathbb{R}$. En particular, el determinante $W(t) := \det[\Phi(t)]$ debería ser no nulo para todo $t \in \mathbb{R}$.]

Pregunta 5. Sea $y_2(x)$ la segunda iteración de Picard del problema de Cauchy $y' = y + x^2$, $y(0) = a$. Entonces:

- a. $y_2(1) = 1 \Leftrightarrow a = 1/6$.
- b. $y_2(1) = 1 \Leftrightarrow a = 7/30$.
- c. $y_2(1) = 1 \Leftrightarrow a = 7/18$.
- d. No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_2(1) = 1$.

Solución: Las primeras iteraciones de Picard son:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= a \\ y_1(x) &= a + \int_0^x (y_0(s) + s^2) ds = a + ax + x^3/3 \\ y_2(x) &= a + \int_0^x (y_1(s) + s^2) ds = a + ax + ax^2/2 + x^3/3 + x^4/12. \end{aligned}$$

Por tanto, $y_2(1) = 1 \Leftrightarrow a + a + a/2 + 1/3 + 1/12 = 1 \Leftrightarrow 5a/2 = 7/12 \Leftrightarrow a = 7/30$.