Equacions Diferencials **Codi:22701** **C**

Temps: 1 hora **Test** 11 de Juny de 2001

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:** ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Considereu la següent equació diferencial ordinària a coeficients variables de segon ordre

$$xy'' + \lambda y' + \frac{\lambda - 1}{x} y = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Per a quins valors del paràmetre λ podem **assegurar** l'existència d'una solució entorn $x = 0$ del tipus $y(x) = \ln x(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r}$?

(a) Només per a $\lambda = 1$ ó $\lambda = 5$. ☒ (b) Per a $\lambda \in (1, 5)$. ☐
(c) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 5} \in \mathbb{Z}$. ☐ (d) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 5} \notin \mathbb{Z}$. ☐

Solució: Escrivint l'equació diferencial en forma normal queda:

$$y'' + \frac{\lambda}{x} y' + \frac{\lambda - 1}{x^2} y = 0.$$

El punt $x = 0$ és singular regular amb $p_0 = \lambda$ i $q_0 = \lambda - 1$. Per tant l'equació indicial és:

$$r^2 + r(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0.$$

Llavors tindrem (segur) una solució amb exponent logarítmic si i només si $r_1 = r_2$, que és equivalent a $\lambda = 1$ ó $\lambda = 5$.

---

2. Donat el sistema d'equacions diferencials ordinàries següent

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - \sin x \end{cases} \qquad \text{(pèndol esmorteït)}$$

es considera la funció $V(x, y) = x^2 + y^2$. Aleshores:

(a) $V(x, y)$ és funció de Lyapunov pel $(0, 0)$ i, per tant, aquest és estable. ☐
(b) $V(x, y)$ no és definida positiva en el $(0, 0)$. ☐
(c) El punt $(0, 0)$ és inestable. ☐
(d) $V(x, y)$ no és funció de Lyapunov en el $(0, 0)$. ☒

Solució:

- $V(x, y)$ és definida positiva entorn del $(0, 0)$.
- $W(x, y) = \frac{\mathrm{d}V(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = 2y(x - y - \sin x) = 0$ és equivalent a $y = 0$ ó $x - y - \sin x = 0$ i això és equivalent a $y = 0$ ó $y = x - \sin x$ en un entorn del $(0, 0)$.
- $W(x, y)$ no té signe definit en un entorn del $(0, 0)$ ja que W és positiva a la regió entre l'eix abscisses i la corba $y = x - \sin x$ i negativa en el complement.

Donat que tant l'eix abscisses com i la corba $y = x - \sin x$ passen pel punt $(0, 0)$ tenim que V no és funció de Lyapunov.

---

3. El problema de valors a la frontera

$$y'' - 2y' + (1+\beta^2)y = 0\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

té solucions no trivials si i només si:

(a) $\beta \in \mathbb{Z}$. ☒ (b) $\beta/\pi \notin \mathbb{Q}$. ☐
(c) $\beta > 0$. ☐ (d) $\beta = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. ☐

Solució: L'equació característica és $m^2 - 2m + 1 + \beta^2 = 0$. Les seves arrels són $m = 1 \pm \beta$i. Per tant, la solució general de l'equació diferencial és $y_h(x) = e^x(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$. Imposem ara les condicions de frontera: $0 = y(0) = C_1$ i $0 = y(\pi) = e^\pi C_2 \sin(\beta\pi)$. Això és equivalent a $C_2 = 0$, que dóna la solució trivial — que es descarta, ó $\sin(\beta\pi) = 0$. Els zeros d'aquesta darrera equació són $\beta = n \in \mathbb{Z}$.

---

4. Considerem el problema de valor inicial per a l'equació d'ones

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = e^x \end{cases}$$

Aleshores:

(a) $u(0,t) = t^2 + \sinh(t)$. ☒ (b) $u(x,0) = \sinh(x)$. ☐
(c) $u(2,3) = 13$. ☐ (d) No té solució. ☐

Solució: Aplicant la fórmula de d'Alembert s'obté:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2c}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds = x^2 + t^2 + e^x \sinh(t).$$

Tenim: $u(x,0) = x^2$, $u(2,3) = 13 + e^2\sinh(3)$ i $u(0,t) = t^2 + \sinh(t)$. Per tant, la solució correcta és la (a).

---

5. Aplicant el mètode d'Euler amb pas $h = 0.5$ al problema $y' = y^2 + x$, $y(0) = 0$, s'obté un valor aproximat de $y(1)$ que és:

(a) 0.25. ☒ (b) 0.5. ☐ (c) 0.75. ☐ (d) 1. ☐

Solució: L'algorisme d'Euler és $y_{n+1} = y_n + 0.5(y_n^2 + x_n)$ amb $h = 0.5$. Tenim

x_n	y_n
0	0
0.5	0
1	0.25

Per tant, la solució correcta és la (a).
