Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 50 minuts **21 de Gener de 2008**

Test

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....

NOTA:

1. Donada l'equació diferencial ordinària $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, amb $p(x)$, $q(x)$ contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, considerem dues solucions $y_1(x)$, $y_2(x)$ que tenen cadascuna un extrem relatiu en un mateix $x_0 \in I$. Què es pot dir de la dependència lineal o de la independència lineal d'aquestes funcions?

   Resposta: Com que $y_1(x)$, $y_2(x)$ són solucions d'una equació diferencial lineal d'ordre 2, podem esbrinar la seva dependència o independència lineal fent servir el wronskià
   $$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$
   En el punt x_0, com que és un extrem relatiu tenim $y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 0$ i per tant, $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Per tant, són linealment dependents.

---

2. Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària $4x^2y'' - 3y = 0$ (per a $x > 0$), fent el canvi $x = e^t$.

   Resposta: Per aplicar el canvi a l'equació diferencial, primer trobem la relació entre les derivades $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ i $\dfrac{d^2y}{dt^2}$.
   $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \dfrac{dy}{dt}$, on hem usat que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$;
   $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \cdot \dfrac{dt}{dx} = \left(-e^{-t} \cdot \dfrac{dy}{dt} + e^{-t}\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) e^{-t} = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$.
   La nova equació per a $y(t)$ és:
   $$4(e^t)^2 \cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 3y = 4\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 3y = 0\,,$$
   lineal a coeficients constants. El polinomi característic és $p(\lambda) = 4\lambda^2 - 4\lambda - 3$, amb arrels $3/2$ i $-1/2$. Per tant, la solució és $y(t) = c_1e^{3t/2} + c_2e^{-t/2}$ i, desfent el canvi, obtenim: $y(x) = c_1x^{3/2} + c_2x^{-1/2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

---

3. Busqueu **totes** les solucions no trivials del problema de valors a la frontera

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(1) - y(0) = 0 \\ y'(1) - y'(0) = 0 \end{cases}$$

per a $\lambda > 0$.

Resposta: La solució general de l'equació diferencial és $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Imposem les condicions de frontera

$$\begin{cases} y(1) - y(0) = c_1 \cos\sqrt{\lambda} + c_2 \sin\sqrt{\lambda} - c_1 = 0 \\ y'(1) - y'(0) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Tenim per a c_1, c_2 un sistema lineal 2×2, homogeni. Demanem que el seu determinant sigui 0, per tenir solució no trivial:

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} - 1 & \sin\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1) \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda}[(\cos\sqrt{\lambda} - 1)^2 + \sin^2\sqrt{\lambda}] = \sqrt{\lambda}(2 - 2\cos\sqrt{\lambda})$$

Llavors, $\cos\sqrt{\lambda} = 1$ i per tant, $\lambda = \lambda_n = (2n\pi)^2 = 4n^2\pi^2$, $n \geq 1$ enter. Per aquests λ_n, la matriu del sistema lineal abans esmentat és tota 0 . Per tant, les solucions no trivials són: $y(x) = c_1\cos(2n\pi x) + c_2\sin(2n\pi x)$, essent $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ qualssevol.

4. Sabent que la solució del problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

té la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calculeu-la fins ordre x^3 (inclòs).

Resposta: Per a la sèrie proposada, tenim $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Substituint a l'equació diferencial,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \text{ídem} + \text{ídem} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1} = \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2}]x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}[n^2 a_n + a_{n-2}]x^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Obtenim la recurrència

$$\begin{cases} a_1 = 0 \quad \text{(cosa que ja sabíem: } a_1 = y'(0) = 0) \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2\,. \end{cases}$$

A més, sabem que $a_0 = y(0) = 1$. A partir de a_0, a_1 podem calcular tots els a_n, i en particular $a_2 = -\dfrac{a_0}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$, $a_3 = -\dfrac{a_1}{3^2} = 0$. Per tant, la solució fins a ordre x^3 és $y(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4)$.