Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

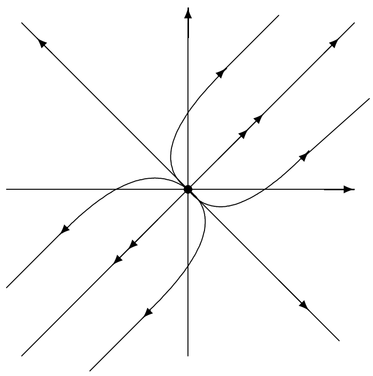
Temps: 1 hora **15 de Gener de 2007**

Test

1. Feu un croquis de les trajectòries del sistema $X' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X$.

Resposta: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, té com valor propis: 5, 1, aleshores és un node propi inestable.

- $\lambda_1 = 5$, $\longrightarrow$ vector propi $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, direcció ràpida.
- $\lambda_1 = 1$, $\longrightarrow$ vector propi $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, direcció lenta.



2. Donat el problema de Cauchy $\begin{cases} X' = t^3 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$, Calculeu $X(1)$.

Resposta: $\dfrac{dX}{dt} = t^3 AX$. Fent el canvi $t = s^\alpha$, el nou sistema és $\dfrac{dX}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{dX}{dt} = \alpha s^{\alpha-1}(s^\alpha)^3 AX$, de coeficients constants si $4\alpha - 1 = 0$, és a dir, $\alpha = 1/4$.
Tenim així: $\dfrac{dX}{ds} = \dfrac{1}{4}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X$, i la solució ve donada per $X(s) = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{s/2} \end{pmatrix} X(0)$.
Desfent el canvi, $X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^4} & 0 \\ 0 & e^{t^4/2} \end{pmatrix} X(0)$, $X(1) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{e} \end{pmatrix}$.

3. Calculeu les solucions periòdiques de l'equació diferencial ordinària $x'' + 16\omega^2 x = \cos(2\omega t)$.

   Resposta:

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \pi\omega \text{ període del forçament} \\ p_0 = \dfrac{2\pi}{4\omega} = \pi 2\omega \text{ període intern} \end{array}\right\} \quad \frac{p}{p_0} = 2 \in \mathbb{N}$$

   Per tant, totes les solucions són $\pi\omega$-periòdiques o bé no hi ha cap solució periòdica.
   Resolent: $x_p(t) = d_1 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t$ solució particular.
   O sigui: $x_p'' + 16\omega^2 x_p = 12\omega^2 d_1 \cos 2\omega t + 12\omega^2 d_2 \sin 2\omega t = \cos 2\omega t \Longrightarrow x_p(t) = \dfrac{1}{12\omega^2} \cos 2\omega t$.
   Solució general: $x(t) = \dfrac{1}{12\omega^2} \cos 2\omega t + c_1 \cos 4\omega t + c_2 \sin 4\omega t$, totes $\dfrac{\pi}{\omega}$-periòdiques.

4. L'algorisme d'Euler aplicat al problema de valors inicials $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$ amb pas h ve donat per:

   Resposta: L'equació ve donada per $f(x, y) = \lambda y$, i per tant, el mètode d'Euler es formula de la manera següent: $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$, és a dir, $y_i = (1 + h\lambda)y_{i-1}$, $i \geq 1$.

5. Donat el problema $\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0\,, \ x \in \mathbb{R}\,, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = x + 2 \end{cases}$, el valor de $u\left(\dfrac{3\pi}{2}, \pi\right)$ és:

   Resposta: Apliquem la fórmula d'Alembert amb $f(x) = \sin x$, $g(x) = x + 2$, $c = 3$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \\ &= \frac{1}{2}[\sin(x+3t) + \sin(x-3t)] + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} (s+2)ds = \\ &= \sin x \cos 3t + \frac{1}{6}\left[\frac{s^2}{2} + 2s\right]_{s=x-3t}^{s=x+3t} = \sin x \cos 3t + xt + 2t. \end{aligned}$$

   Avaluant en el punt, $u\left(\dfrac{3\pi}{2}, \pi\right) = 1 + \dfrac{3\pi^2}{2} + 2\pi$.