Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **23 de Gener de 2006**

Test

1. Considerem la solució $X(t)$ del problema de Cauchy $X' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Llavors, la condició $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$ implica:

   (a) $\alpha(a - \sqrt{a^2+1}) - \beta = 0.$ ☐ (b) $\alpha(a + \sqrt{a^2+1}) + \beta = 0.$ ☐

   (c) $\alpha(-a - \sqrt{a^2+1}) + \beta = 0.$ ☐ (d) $\alpha(a - \sqrt{a^2+1}) + \beta = 0.$ ☐

   Solució: (b)

   Resolució: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \text{traça } A = 0$; $D = \det A = -(a^2+1) < 0 \Longrightarrow$ sella.

   Les úniques condicions inicials que tendeixen a l'origen quan $t \to +\infty$ si el sistema és una sella, són les situades sobre l'única direcció d'entrada, és a dir, sobre la direcció dels vectors propis de valor propi < 0.

   $Q_A(t) = t^2 - (a^2+1) \Longrightarrow$ valors propis: $\lambda_\pm = \pm\sqrt{a^2+1}$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \text{Nuc } (A - \lambda_- I) \iff \begin{pmatrix} a + \sqrt{a^2+1} & 1 \\ 1 & -a + \sqrt{a^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left.\begin{array}{r} \alpha(a + \sqrt{a^2+1}) + \beta = 0 \\ \alpha + (-a + \sqrt{a^2+1})\beta = 0 \end{array}\right\}$$

---

2. Prenent una funció del tipus $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, amb α, β adequats, podem dir que el $(0,0)$ per al sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = 3xy^2 - x^5 \\ y' = -4x^2y - y^5 \end{array}\right.$, és:

   (a) Inestable. ☐

   (b) Estable, però no asimptòticament estable. ☐

   (c) Asimptòticament estable. ☐

   (d) No és possible decidir l'estabilitat amb aquesta $V(x,y)$. ☐

   Solució: (c)

   Resolució: $W = \dot V = 2\alpha x\dot x + 2\beta y\dot y = 2(3\alpha - 4\beta)x^2y^2 - 2(\alpha x^6 + \beta y^6) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha,\beta>0 \\ 3\alpha-4\beta=0}}{=} -2(\alpha x^6 + \beta y^6)$ és definida negativa, per tant asimptòticament estable.

3. Donat el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = \cos x - y \end{array} \right.$

   (a) $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, són punts d'equilibri inestables. ☐
   (b) $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, són punts d'equilibri asimptòticament estables. ☐
   (c) $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, són punts d'equilibri estables, però no asimptòticament estables. ☐
   (d) $(\pi + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, són punts d'equilibri inestables. ☐

   Solució: (b)

   Resolució: Punts d'equilibri en $\left. \begin{array}{l} x' = y \\ y' = \cos x - y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$

   La matriu del sistema lineal associat en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ traça $A = -1 < 0$; $\det A = 1 > 0 \Rightarrow$ asimptòticament estables.

---

4. Considerem l'oscil·lació esmorteïda forçada donada per l'equació $x'' + 2\omega_0 x' + \omega_0^2 x = A\sin(\omega t)$ essent w_0, w, A nombres reals positius. Si $u(t)$ és la solució periòdica d'aquesta equació, qualsevol altra solució és de la forma:

   (a) $(c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\omega_0}{2}t} - u(t)$. ☐ (b) $(c_1 t + c_2)e^{-\omega_0 t} + u(t)$. ☐
   (c) $(c_1 t + c_2)e^{-\omega_0 t} - u(t)$. ☐ (d) $A\omega\sin(\omega t + \varphi) + u(t)$. ☐

   Solució: (b)

   Resolució: $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\omega_0 t} + u(t)$, ja que:
   $p(m) = m^2 + 2\omega_0 m + \omega_0^2 = (m + \omega_0)^2$ és el polinomi característic de la part homogènia, i $x_p(t) = u(t)$ és una solució particular de l'equació lineal no homogènia.

---

5. Quins són els valors propis i les funcions pròpies del següent problema $\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \ \ \forall x \in (0, \pi) \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{array} \right.$

   (a) $\lambda_n = -(n + (1/2))^2$, $X_n(x) = \sin(n + (1/2))x$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ☐
   (b) $\lambda_n = (n + (1/2))^2$, $X_n(x) = \sinh(n + (1/2))x$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ☐
   (c) $\lambda_n = -n^2$, $X_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ☐
   (d) $\lambda_n = -(n + (1/2))^2$, $X_n(x) = \sin(n + (1/2))x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ☐

   Solució: (a)

   Resolució: Cas $\lambda = 0$: $X(x) = a + bx \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$ NO!

   Cas $\lambda = \mu^2 > 0$: $X(x) = a\cosh\mu x + b\sinh\mu x \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \mu b\cosh\mu\pi = 0 \end{array} \right.$ NO!

   Cas $\lambda = -\mu^2 < 0$: $X(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \mu b\cos\mu\pi = 0 \end{array} \right.$ $\cos\mu\pi = 0$; $\mu_n = (1/2) + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   $\left. \begin{array}{ll} \text{Valors propis:} & \lambda = \lambda_n = -(n + (1/2))^2 \\ \text{Funcions pròpies:} & X(x) = X_n(x) = \sin((n + (1/2))x) \end{array} \right\}, \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots.$