

**Test**

1. La matriu  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ t^2 e^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$ , per a tot  $t \in \mathbb{R}$ :

- (a) És una matriu fonamental d'un sistema homogeni a coeficients constants.
- (b) No és matriu fonamental d'un sistema homogeni a coeficients constants.
- (c) És matriu fonamental, d'un sistema homogeni a coeficients variables.
- (d) Cap de les altres.

**Solució:** (b)

**Resolució:**  $\det \phi(t) = (t+1)e^{4t} - t^2 e^{2t}$ . Observem que  $\det \phi(-1) = -e^{-2} < 0$  i  $\det \phi(0) = 1 > 0$ . Aplicant aleshores Bolzano, existeix  $t_0 \in (-1, 0)$ , tal que  $\det \phi(t_0) = 0$ . No es compleix doncs que  $\det \phi(t) \neq 0$ , per a tot  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $x(t)$  és la solució del problema de valors inicials  $\begin{cases} x'' + \omega^2 x = \sin \beta t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ . El límit de  $x(1)$  quan  $\beta \rightarrow \omega$ , val:

- (a)  $\frac{1}{2\omega^2} \sin \omega - \frac{1}{2\omega} \cos \omega$ .
- (b)  $\frac{1}{2\omega^2} \sin \omega + \frac{1}{2\omega} \cos \omega$ .
- (c)  $\frac{1}{\omega^2} \sin \omega - \frac{1}{2\omega} \cos \omega$ .
- (d)  $\frac{1}{2\omega} \sin \omega - \frac{1}{2\omega} \cos \omega$ .

**Solució:** (a)

**Resolució:** Com que busquem un límit quan  $\beta \rightarrow \omega$ , podem suposar  $\beta \neq \omega$ . Resolem el problema de valor inicial:

- $x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ .
- pel mètode dels coeficients trobem la solució particular  $x_p(t) = \frac{1}{\omega^2 - \beta^2}$ .

Per tant, la solució general de l'equació diferencial ordinària és  $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t$ .

Imposant les condicions inicials trobem que la solució del problema de valor inicials és  $x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t - \frac{\beta}{\omega(\omega^2 - \beta^2)} \sin \omega t$ .

Finalment, prenent límit:

$$\lim_{\beta \rightarrow \omega} x(1) = \lim_{\beta \rightarrow \omega} \frac{\omega \sin \beta - \beta \sin \omega}{\omega(\omega^2 - \beta^2)} \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \lim_{\beta \rightarrow \omega} \frac{\omega \cos \beta - \sin \omega}{-2\omega\beta} = \frac{\sin \omega}{2\omega^2} - \frac{\cos \omega}{2\omega}.$$

3. Aplicant el mètode d'Euler al problema de Cauchy  $\begin{cases} y'' = xy + y' \\ y(0) = 0, y'(0) = a \end{cases}$  amb pas  $h = 1/2$ , el valor d' $a$  per tal que l'aproximació de  $y'(1)$  sigui 1, és:  
 (a)  $a = 4/19$ .  (b)  $a = -8/19$ .  (c)  $a = -4/19$ .  (d)  $a = 8/19$ .

**Solució:** (d)

**Resolució:** El sistema de 1r ordre equivalent és:

$$\left. \begin{aligned} y' &= z \\ z' &= xy + z \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Per tant, en aquest cas, l'algorisme d'Euler ve donat per

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ z_0 = a \\ y_{k+1} = y_k + hz_k \\ z_{k+1} = z_k + h(x_k y_k + z_k) \end{cases}$$

amb  $x_k = kh$ . Construïm la taula de valors aproximats per a  $h = 1/2$ :

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$
0	0	0	$a$
1	1/2	1/2 $a$	3/2 $a$
2	1	5/4 $a$	$\frac{19}{8}a \simeq y'(1) = 1 \Rightarrow a = \frac{8}{19}$ .

4. Fent servir la funció  $V(x, y) = x^2 + y^2$  per tal de determinar l'estabilitat del  $(0, 0)$  com a punt d'equilibri del sistema  $\begin{cases} x' = \alpha y + y \cos y \\ y' = -x \cos y - \alpha y \end{cases}$ , podem afirmar que

- (a) No es pot decidir l'estabilitat per a cap  $\alpha$ .  (b) Si  $\alpha = 0$ , el  $(0, 0)$  és estable.   
 (c) Si  $\alpha > 0$ , el  $(0, 0)$  és estable.  (d) Si  $\alpha < 0$ , el  $(0, 0)$  és estable.

**Solució:** (b)

**Resolució:** Aplicant el mètode de Lyapunov

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = 2\alpha y(x - y)$$

Si  $\alpha = 0$ , llavors  $W$  és semidefinida negativa i per tant, el  $(0, 0)$  és estable.

Si  $\alpha \neq 0$ , llavors  $W(0, y) = -2\alpha y^2$  i  $W\left(x, \frac{x}{2}\right) = \alpha \frac{x^2}{2}$  tenen signe diferent. Per tant, no decideix.

5. L'equació  $(1 - x^2)y'' + \frac{1 - 3x^2}{x}y' - y = 0$  té punts singulars-regulars en:

- (a)  $x = \pm 1, \pm 1/\sqrt{3}, 0$ .  (b)  $x = \pm 1, 0$ .  (c)  $x = \pm 1$ .  (d)  $x = 0$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:**  $P(x) = \frac{1 - 3x^2}{x(1 - x^2)}$ ,  $Q(x) = \frac{-1}{1 - x^2}$ , aleshores els punts singulars són  $0, \pm 1$

- $xP(x) = \frac{1 - 3x^2}{1 - x^2}$ ,  $x^2Q(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2}$  analítica 0, llavors 0 és singular-regular.
- $(x - 1)P(x) = \frac{1 - 3x^2}{-x(1 + x)}$ ,  $(x - 1)^2Q(x) = \frac{x^2(x - 1)}{1 + x}$  analítica en 1, llavors 1 és singular-regular.
- $(x + 1)P(x) = \frac{1 - 3x^2}{1 - x}$ ,  $(x + 1)^2Q(x) = \frac{-x^2(1 + x)}{1 - x}$  analítica en  $-1$ , llavors  $-1$  és singular-regular.