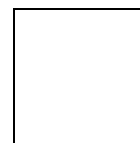


NOM: .....  
 COGNOMS: .....  
 DNI: .....



NOTA:

Marqueu amb  la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Donat un sistema lineal en el pla  $X' = AX$ , on  $A$  és una matriu constant  $2 \times 2$ , una recta  $r$  s'anomena *invariant* si donada  $X(0) \in r$ , es compleix que  $X(t) \in r, \forall t$ .  
 Si els valors propis de  $A$  són reals i tals que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , podem afirmar que el nombre de rectes invariants és:  
 (a) 1.  (b) 2.  (c) 0.  (d)  $\infty$ .

Solució: (b)

**Resolució:** En aquestes hipòtesis el punt d'equilibri  $(0,0)$  és una sella, per tant hi ha 2 rectes invariants, que són les que passen pel  $(0,0)$  i tenen per vector director un dels vectors propis.

2. Sigui el sistema d'equacions diferencials ordinàries  $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X, X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Llavors  $X(1)$  val:  
 (a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  (b)  $\begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}$ .  (c)  $\begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix}$ .  (d)  $\begin{pmatrix} -e \\ 2e \end{pmatrix}$ .

Solució: (c)

**Resolució:** Per a la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , la matriu de Jordan és  $A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  i una base de Jordan és  $v_1, v_2$ , amb  $v_1 \notin \text{Ker}(A - I)$  i  $v_2 = (A - I)v_1$ , per exemple  $v_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Per tant una matriu de canvi de base és  $S = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Resulta aleshores que  $X(t) = Se^{A_J t} S^{-1} X(0) = \begin{pmatrix} e^t \\ -2te^t + e^t \end{pmatrix}$ . Per tant,  $X(1) = \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix}$ .

3. Sigui l'equació diferencial ordinària lineal homogènia  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ , i  $y_1(x), y_2(x)$  dues solucions qualssevol. La condició necessària i suficient per tal que el wronskià  $W(y_1(x), y_2(x))$  sigui constant és:  
 (a)  $a_0(x) \equiv 0, \forall x$ .  (b)  $a_1(x) \equiv 0, \forall x$ .   
 (c)  $a_0(x) \equiv 1, \forall x$ .  (d)  $a_0(x) = a_1(x), \forall x$ .

Solució: (b)

**Resolució:** El sistema de primer ordre equivalent a l'equació diferencial ordinària donada és  $Y' = AY$  amb  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}$  i té per solucions  $Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$ . Sabem aleshores que  $W(y_1(x), y_2(x)) = W(Y_1(x), Y_2(x))$  i pel teorema de Liouville  $W(y_1(x), y_2(x)) = W(y_1(0), y_2(0))e^{\int_0^x -a_1(s)ds}$ .

Aleshores  $W(y_1(x), y_2(x))$  és constant si, i només si,  $\int_0^x -a_1(s)ds$  és constant. Pel que derivant respecte d' $x$ , això equival a dir que  $a_1(x) = 0, \forall x$ .

4. Sabem que l'equació diferencial ordinària  $x'' + (2k + 1)^2x = \sin 8t + 2 \cos(12t - 1)$ , amb  $k \in \mathbb{N}$ , té una solució periòdica de període mínim  $\pi/2$ . Les altres solucions:

- (a) Són periòdiques, amb període mínim  $2\pi$ .
- (b) Són periòdiques, amb període mínim  $\pi/2$ .
- (c) No són periòdiques.
- (d) Són periòdiques, amb període mínim  $2\pi/(2k + 1)$ .

**Solució:** (a)

**Resolució:** Es tracta d'una oscil·lació forçada no esmorteïda amb  $\omega = 2k + 1$ . El període de la part homogènia és  $p_0 = \frac{2\pi}{2k + 1}$ . El període mínim del forçament és  $p = mcm\left(\frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Tenim doncs que  $\frac{p}{p_0} = \frac{2k + 1}{4}$  racional no enter que és una fracció irreduïble del tipus  $\frac{M}{N}$  amb  $N = 4$ . Aleshores, totes les solucions són periòdiques, una d'elles amb període mínim  $p = \frac{\pi}{2}$  i les altres amb període mínim  $Np = 2\pi$ .

5. Considerem el problema de Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y'' = y - x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicant l'algorisme d'Euler al sistema de primer ordre equivalent a (\*), el valor aproximat de  $y(1)$  amb pas  $h = 0.5$ , és:

- (a) 1.
- (b) 9/8.
- (c) 5/4.
- (d) 7/8.

**Solució:** (c)

**Resolució:** El problema de valor inicial de primer ordre equivalent a (\*) és

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z \\ y - x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Aplicant aleshores l'algorisme d'Euler amb pas  $h = 0,5$ :

- $\begin{pmatrix} y_{1/2} \\ z_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 - 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .
- $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1/2} \\ z_{1/2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_{1/2} \\ y_{1/2} - (1/2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 7/8 \end{pmatrix}$ .

$\implies y(1) \simeq 5/4$ .