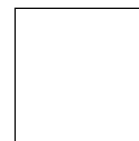


NOM:
 COGNOMS:
 DNI:



NOTA:

Marqueu amb la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Considereu l'equació diferencial ordinària $x^2y'' + (\alpha x^2 - x)y' + (\alpha x^2 - \alpha^2)y = 0$, que depèn d'un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$. Els únics valors de α per als quals l'equació té alguna solució de la forma $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, amb $a_0 \neq 0$, són:

- (a) $\alpha = \pm 4/3$. (b) $\alpha = 4/3$. (c) $\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$. (d) $\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Resolució: Calculem els límits $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2 - x}{x} = -1$, $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha x^2 - \alpha^2) = -\alpha^2$.

Per tant el 0 és un punt singular regular, amb l'equació indicial $r(r - 1) + p_0 r + q_0 = r^2 - 2r - \alpha^2 = 0$.

Les arrels indicials són: $r = 1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}$. D'acord amb el mètode de Frobenius, perquè hi hagi una solució de la forma indicada cal que $1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2} = -\frac{1}{3} \implies 1 + \alpha^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \implies \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$. A més, la diferència entre les arrels indicials és $2\sqrt{1 + \alpha^2} = \frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$, i per tant no hi haurà cap terme logarítmic a les solucions.

2. La solució general de l'equació diferencial ordinària $2x^2y'' + xy' = -3/x$, $x > 0$, és:

- (a) $c_1 + c_2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$. (b) $c_1x + c_2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.
 (c) $c_1 + c_2\sqrt{x} - x$. (d) $-\frac{1}{x}$.

Resolució: És una equació de Cauchy-Euler no homogènia.

• Part homogènia: $2x^2y'' + xy' = 0$; equació auxiliar: $2\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$, que té les arrels 0 i 1/2 (simples). Per tant, la solució general de la part homogènia: $y_h(x) = c_1 + c_2\sqrt{x}$.

• Variació de paràmetres: busquem una solució particular $y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)\sqrt{x}$, amb $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2x^3} \end{pmatrix}$. Obtenim: $u_1' = \frac{3}{x^2}$, $u_2' = -3x^{-5/2}$. Integrant, obtenim: $u_1 = -\frac{3}{x}$, $u_2 = 2x^{-3/2}$. Per tant, $y_p(x) = -\frac{3}{x} + 2x^{-3/2}\sqrt{x} = -\frac{1}{x}$.

• La solució general és $y(x) = -\frac{1}{x} + c_1 + c_2\sqrt{x}$.

3. Donada l'equació diferencial ordinària $x'' + \omega^2 x = \sin 2t$, tots els valors de $\omega > 0$ per als quals l'equació NO té solucions periòdiques són:

- (a) $\omega = 2$. (b) $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 (c) $\omega = 2n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ (d) $\omega = 2n, n = 1, 2, 3, \dots$

Resolució: Període de les solucions de la part homogènia: $p_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. Període del terme de forçament: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
 Tenim doncs que $\frac{p}{p_0} = \frac{\omega}{2}$.

Per no tenir cap solució periòdica és necessari que $\frac{p}{p_0}$ sigui enter, és a dir, $\omega = 2n, n = 1, 2, 3, \dots (\omega > 0)$. I en aquest cas, caldrà que alguna de les integrals $I_1 = \int_0^\pi \sin 2t \cos 2nt dt, I_2 = \int_0^\pi \sin 2t \sin 2nt dt$ sigui no nul·la. Usant les fórmules $\sin 2t \cos 2nt = (\sin(2n+2)t + \sin(2n-2)t)/2, \sin 2t \sin 2nt = (\cos(2n-2)t - \cos(2n+2)t)/2$, (o bé una taula de primitives) obtenim que $I_1 = 0 \forall n \geq 1$, i que $I_2 = \pi/2$ si $n = 1, I_2 = 0 \forall n \geq 2$. Per tant, l'únic cas en què no hi ha cap solució periòdica és $n = 1$, és a dir $\omega = 2$.

4. Considereu $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - y - xy^2 - x^3 \end{cases}$. Usant el mètode de Lyapunov entorn el $(0, 0)$ amb $V(x, y) = x^2 + (x - y)^2$ podem afirmar que:

- (a) No es decideix l'estabilitat.
 (b) L'origen és estable, però no asimptòticament estable.
 (c) L'origen és inestable.
 (d) L'origen és asimptòticament estable.

Resolució: El sistema té un punt d'equilibri en el $(0, 0)$. Aplicant el mètode de Lyapunov amb la funció V (la qual és definida positiva en el $(0, 0)$), obtenim

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = (4x - 2y)(-x^3 - xy^2) + (2y - 2x)(x - y - xy^2 - x^3) = -2(x - y)^2 - 2x^4 - 2x^2x^2 \leq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La funció W és definida negativa en el $(0, 0)$, ja que $W(x, y) < 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. En efecte, si $W(x, y) = 0$, llavors $(x - y)^2 = 0$ i $x^4 = 0$, i per tant $x = y = 0$. Deduïm que el $(0, 0)$ és asimptòticament estable.

5. El problema de Cauchy $\begin{cases} T'(t) = k(a - T(t)) \\ T(0) = 0 \end{cases}$, amb a i k constants, descriu, segons la llei de refredament de Newton, la variació de la temperatura $T(t)$ d'un cos que es troba inicialment a temperatura 0. Aplicant el mètode d'Euler amb pas h , el valor aproximat de $T(3h)$ és:

- (a) $T_3 = hka(3 - 3hk + h^2k^2)$. (b) $T_3 = hka(3 + 3hk + h^2k^2)$.
 (c) $T_3 = hka(-1 + 3hk - h^2k^2)$. (d) $T_3 = hka(1 - 3hk + h^2k^2)$.

Resolució: El mètode d'Euler amb pas h per al problema de Cauchy proposat:

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = T_n + hk(a - T_n) \end{cases}$$

Fem 3 passos d'aquesta recurrència:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 + hk(a - 0) = hka \\ T_2 &= hka + hk(a - hka) = hka(2 - hk) \\ T(3h) \cong T_3 &= hka(2 - hk) + hk(a - hka(2 - hk)) = hka(3 - 3hk + h^2k^2) \end{aligned}$$