Equacions Diferencials **Codi: 22701** **D**

Temps: 1 hora **Test** 15 de Gener de 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:** ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Considerem el problema de Cauchy

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} X(t), \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

essent $\alpha \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Per a quins valors de α la solució $X(t)$ compleix que $\lim_{t\to+\infty} \| X(t) \| = 0$?

(a) $\alpha = -1$. ☐ (b) $\alpha = 0$. ☐
(c) Per a cap valor de α. ■ (d) $\alpha \neq -1$. ☐

....

Solució: $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 - \alpha^2 \Rightarrow$ Valors propis: $\lambda_+ = \sqrt{1+\alpha^2}$, $\lambda_- = -\sqrt{1+\alpha^2}$.

$\lambda_+ > 0$ i $\lambda_- < 0 \Rightarrow A$ sella $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és vector propi de valor propi λ_-.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ \alpha-1 \end{pmatrix} = \lambda_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1+\alpha = \lambda_- = \alpha - 1 \Rightarrow 1 = -1 \text{ (Impossible.)}$$

No hi ha cap valor de α solució.

---

2. Considerem el problema de valor inicial per a l'equació d'ones:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = e^x \end{cases}$$

Llavors, tenim que:

(a) $u(0,\pi/4) = (1/2)\sinh(\pi/2)$. ■ (b) $u(0,\pi/4) = (1/2)\sinh(\pi/2) + 1$. ☐
(c) $u(0,\pi/4) = (1/2)\sinh(\pi)$. ☐ (d) $u(0,\pi/4) = (1/2)\sinh(\pi) + 1$. ☐

....

Solució: D'Alembert: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$

$c = 2$; $f(x) = \sin x$; $g(x) = e^x$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\sin(x+2t) + \sin(x-2t)] + \frac{1}{2\cdot 2}\int_{x-2t}^{x+2t} e^s ds =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x+2t) + \sin(x-2t)] + \frac{1}{4}[e^{x+2t} - e^{x-2t}]$$

$$(u,\pi/4) = \frac{1}{2}[\sin\pi/2 + \sin(-\pi/2)] + \frac{1}{4}[e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}] = \frac{1}{2}\sinh(\pi/2)$$

3. Sigui (x_0, y_0) un punt crític d'un sistema no lineal pla. Sigui A la matriu del sistema linealitzat entorn a aquest punt. Sigui $T = $traça$A$ i $D = \det A$. La linealització NO determina l'estabilitat del sistema no lineal si, i només si:

(a) $TD = 0$ i $D \geq 0$. ☐ (b) $TD = 0$, $D \geq 0$ i $T \leq 0$. ■
(c) $D = 0$ i $T \leq 0$. ☐ (d) $T = 0$ i $D > 0$. ☐

....

Solució:

•La linealització NO determina l'estabilitat si:
(Tots verifiquen (a) i (b))

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \to T = D = 0 \begin{cases} \text{verifica (a), (b), (c)} \\ \text{no verifica (d)} \end{cases} \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 0 \to T < 0, D = 0 \begin{cases} \text{verifica (a), (b), (c)} \\ \text{no verifica (d)} \end{cases} \\ \lambda_{1,2} = \pm i\beta \to T = 0, D > 0 \begin{cases} \text{verifica (a), (b), (d)} \\ \text{no verifica (c)} \end{cases} \end{cases}$$

• La linealització determina l'estabilitat: $\begin{cases} Re(\lambda_{1,2}) < 0 \to T < 0, D > 0 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \to D = 0, T > 0 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \to D < 0 \\ Re(\lambda_{1,2}) > 0 \to D > 0 \end{cases}$

(Cap verifica (b). Algun verifica (a)).

---

4. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció $C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$. El wronskià de les funcions $x_1(t) = tf(t)$, $x_2(t) = |t|f(t)$,

(a) És diferent de 0 per a tot $t \in \mathbb{R}$. ☐ (b) Cap de les altres respostes és correcta. ☐
(c) Val 0 per a tot $t \in R$. ■ (d) No està ben definit per a tot $t \in \mathbb{R}$. ☐

....

Solució: $W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$ i $x_2'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{|t|f(t) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} f(t) = 0,$

Per tant, $x_2(t) = \begin{Bmatrix} tf(t): & t > 0 \\ 0: & t = 0 \\ -tf(t): & t < 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow x_2'(t) = \begin{Bmatrix} f(t) + tf'(t): & t > 0 \\ 0: & t = 0 \\ -f(t) - tf'(t): & t < 0 \end{Bmatrix}$

d'on, $W(t > 0) = \begin{vmatrix} tf(t) & tf(t) \\ f(t) + tf'(t) & f(t) + tf'(t) \end{vmatrix} = 0;$

$W(t = 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ $W(t < 0) = \begin{vmatrix} tf(t) & -tf(t) \\ tf(t) + tf'(t) & -f(t) - tf'(t) \end{vmatrix} = 0$

---

5. Considerem el següent problema de valors inicials: $\begin{cases} y'' = (1 - x)yy' \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$. Si definim $v = y'$ i escriviu el sistema de primer ordre equivalent corresponent a (y, v), els valors aproximats que obtenim per a $y(1)$ i $v(1)$, si apliqueu el mètode d'Euler al sistema amb $h = 1/2$, són:

(a) $y(1) \simeq 1\,,\ v(1) \simeq 5/4$. ☐ (b) $y(1) \simeq 1\,,\ v(1) \simeq 3/2$.☐
(c) Cap de les altres respostes és correcta. ■ (d) $y(1) \simeq 1/2\,,\ v(1) \simeq 1$.☐

....

Solució: $\left.\begin{matrix} y' = v \\ v' = (1 - x)yv \end{matrix}\right\} \begin{matrix} y(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{matrix}$ Euler: $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_n \\ (1 - x_n)y_n v_n \end{pmatrix}$

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = 1$

$n = 0$: $\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - 0) \cdot 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = x_0 + (1/2) = 1/2$

$n = 1$: $\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - (1/2)) \cdot (1/2) \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/8 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = x_1 + (1/2) = 1$