

Test

NOM:
 COGNOMS:
 DNI:
 GRUP:

NOTA:

1. Sigui $\phi(t)$ una matriu fonamental del sistema d'equacions diferencials ordinàries de 1r ordre $X' = AX$. Què ha de complir una matriu R invertible i constant per tal que $\psi(t) = -R\phi(-t)R$ sigui també matriu fonamental del mateix sistema.

Resolució: $\phi(t)$ matriu fonamental $\Rightarrow \phi'(t) = A\phi(t)$, $\det \phi \neq 0$.

$\det \psi(t) = -\det^2 R \cdot \det \phi(-t) \neq 0$, doncs R és invertible

$$\left. \begin{aligned} \psi'(t) &= -R\phi'(-t)(-1)R = RA\phi(-t)R \\ A\psi(t) &= -AR\phi(-t)R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Per tant, una condició necessària i suficient per tal que } \psi(t) \text{ sigui solució del sistema } X' = AX, \text{ és } RA\phi(-t)R = -AR\phi(-t)R, \forall t$$

\Updownarrow ($\Rightarrow R$ invertible; $\phi(t)$ invertible)

$RA = -AR.$

2. Calculeu la solució del problema de valors inicials

$$x'' + 15x = 5, \quad x(0) = 4/3, \quad x'(0) = 0,$$

i dibuixeu-ne la gràfica aproximada.

Resolució: Apliquem el mètode de coeficients indeterminats

1) $p(n) = n^2 + 15 \Rightarrow n_{1,2} = \pm\sqrt{15}i \Rightarrow x_h(t) = c_1 \cos(\sqrt{15}t) + c_2 \sin(\sqrt{15}t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

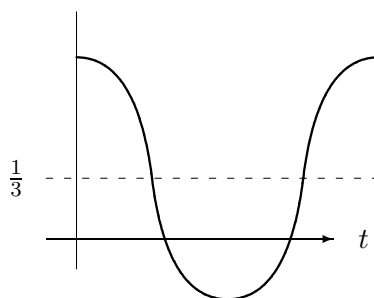
2) $p_1(D) = D$ anul·la $g(t) = 5$, aleshores $x_p(t) = c_3$ és un candidat a solució particular.

3) Imposem que $x_p(t)$ compleixi l'equació diferencial ordinària per determinar c_3 ,

$$5 = x_p'' + 15x_p = 15c_3 \Rightarrow c_3 = 1/3 \Rightarrow x_G(t) = x_h(t) + 1/3.$$

4) Imposem les condicions inicials per determinar c_1 i c_2

$$\left. \begin{aligned} 4/3 = x(0) &= c_1 + 1/3 \Rightarrow c_1 = 1 \\ 0 = x'(0) &= \sqrt{15}c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t) = \cos \sqrt{15}t + 1/3$$



3. Trobeu (si n'hi ha) les solucions periòdiques de l'equació $x'' + x = 4 \cos^3 t$.

Resolució:

$$\left. \begin{array}{l} w = 1 \implies p_0 = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \\ b(t) = 4 \cos^3 t \text{ té període } p = 2\pi \end{array} \right\} \implies p/p_0 = 1 \in \mathbb{Z}$$

Per veure si existeixen solucions periòdiques, considerem les integrals

$\int_0^p b(t) \cos wtdt = 4 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt > 0$; aleshores, pel fenomen de ressonància no esmorteïda, no existeixen solucions periòdiques (el valor de $\int_0^p b(t) \sin wtdt$ no importa).

4. Considereu el problema de valor inicial $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ en un domini $\Omega = \overline{B}_r(0, 0)$, amb $r > 0$. Calculeu, en funció de r , l'interval $I_r = [-a(r), a(r)]$ d'existència de solució donat pel teorema de Picard i digueu per a quin valor de $r > 0$ és aquest interval el més gran possible.

Resolució:

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y) = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \Omega = \overline{B}_r(0, 0)$$

$$M_r = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in \overline{B}_r(0, 0)\} = \max\{1 + y^2, x^2 + y^2 \leq r^2\} = 1 + r^2.$$

$$\text{Aleshores } a(r) = \min\left\{\frac{r}{2M_r}, \frac{r}{2}\right\} = \frac{r}{2(1+r^2)}$$

$$a'(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+r^2) - r(2r)}{(1+r^2)^2} \right) = \frac{1-r^2}{2(1+r^2)^2} = 0 \iff r = \pm 1 \text{ (únic candidats a extrems de la funció } a(r).)$$

A més, $a(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} a(r) = 0$ i $a(r) > 0$ si $r > 0$. Per tant, $a(r)$ té un màxim absolut en $r = 1$ i $a(1) = 1/4$. Aleshores $I_1 = [-1/4, 1/4]$ és l'interval buscat.