Equacions Diferencials

Codi: 22701 **A**

Temps: 1 hora **Test** 6 d'Abril de 2006

---

1. Sigui $x(t)$ una solució de l'oscil·lació forçada esmorteïda $x'' + 2kx' + \omega^2 x = \sin\omega t$, amb $k > 0$ i $\omega > 0$. Calculeu $\lim\limits_{t\to\infty}(4k^2\omega^2x^2(t) + \sin^2\omega t)$.

Resolució: Sabem que l'equació té una única solució periòdica $x_p(t)$ i que tota altra solució tendeix a ella.

Prenent doncs $x_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Obtenim $A = -\dfrac{1}{2k\omega}$ i $B = 0 \Longrightarrow x_p(t) = -\dfrac{1}{2k\omega}\cos\omega t$.

Aleshores: $\lim\limits_{t\to+\infty} 4k^2\omega^2x^2(t) + \sin^2\omega t = \lim\limits_{t\to+\infty} 4k^2\omega^2x_p(t) + \sin^2\omega t = 1.$

---

2. Sigui $\Phi(t)$ una matriu fonamental del sistema $X' = A(t)X$. Demostreu que $A(t)$ és a coeficients constants si, i només si, $\Phi'' = \Phi'\Phi^{-1}\Phi'$.

Resolució: $\phi(t)$ matriu fonamental $\Longleftrightarrow \Phi(t)$ invertible i $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \Longleftrightarrow A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$.

$A(t)$ constant $\Longleftrightarrow A'(t) = 0,\ \forall\, t \Longleftrightarrow (\Phi'\Phi^{-1})' = 0 \Longleftrightarrow \Phi''\Phi^{-1} + \Phi'(\Phi^{-1})' = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \Phi''\Phi^{-1} - \Phi'\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1} = 0 \Longleftrightarrow \Phi'' = \Phi'\Phi^{-1}\Phi'$,

on usem que $\Phi^{-1}\Phi = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow (\Phi^{-1})'\Phi + \Phi^{-1}\Phi' = 0 \Longleftrightarrow (\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}$.

---

3. Sigui $W(t)$ el Wronskià de **la matriu principal** (en $t = 0$) del sistema lineal $X' = AX$, on $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculeu $W(3)$.

Resolució: Per la fórmula de Loiuville, $W(t) = W(0)e^{\int_0^t \mathrm{tr} A ds} = W(0)e^{(a+d)t} = e^{(a+d)t}$, on usem que $W(0) = \det\Phi(0) = \det(\mathrm{Id}) = 1$, ja que si $\Phi(t)$ matriu principal en $t = 0$ es verifica que $\Phi(0) = \mathrm{Id}$.

---

4. Trobeu l'equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants i d'ordre més baix que té per solucions linealment independents $\sin(2x)$, $x\sin(2x)$.

Resolució: Si $p(\lambda)$ és l'equació característica de l'equació diferencial ordinària , ha de tenir l'arrel $m = \pm 2i$ amb multiplicitat $2 \Longrightarrow p(\lambda) = (\lambda^2+4)^2 = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 \Longrightarrow$ l'equació diferencial ordinària és: $y^{\mathrm{iv})} + 8y'' + 16y = 0$.

---

5. Trobeu totes les solucions polinòmiques que siguin comunes a totes les equacions diferencials ordinàries de la forma $y^{n)} + y'' = x - 1$ (per a tota $n \geq 4$).

Resolució: Siguin $m \neq n$, $m \geq 4$ i $n \geq 4$. Aleshores, s'ha de complir que $y^{\mathrm{m})} + y'' = x - 1$, $y^{\mathrm{n})} + y'' = x - 1$ i $y(x)$ polinòmica $\Longrightarrow y^{\mathrm{m})} = y^{\mathrm{n})}$ i $y(x)$ polinòmica $\Longrightarrow y(x)$ polinomi de grau 3. Per tant, cal buscar les solucions polinòmiques de $y'' = x - 1$

$$y'' = x - 1 \Longrightarrow y' = \frac{x^2}{2} - x + A \Longrightarrow Ax + B + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} = y(x)\,.$$
