

1. Sigui  $y_1(x) = x$  una solució de l'equació diferencial ordinària  $x^2y'' + xy' - y = 0$ ,  $x > 0$ . Fent servir el mètode de reducció de l'ordre, una segona solució linealment independent és:

**Resolució:** Escrivim l'equació diferencial ordinària en forma normal:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0$$

definint  $P(x) = \frac{1}{x}$ ; tenim que una segona solució linealment independent amb  $y_1(x)$  ve donada per la fórmula

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}x^{-1}.$$

2. Sigui  $\phi(t)$  una matriu fonamental de  $X'(t) = A(t)X(t)$  i sigui  $\psi$  una matriu fonamental de  $X'(t) = [A(t) + B(t)]X(t)$ . Llavors,  $(\phi(t))^{-1}\psi(t)$  és una matriu fonamental de:

- (a)  $X'(t) = [(\phi(t))^{-1}B(t)\phi(t)]X(t)$ .       (b)  $X'(t) = [\phi(t)B(t)(\phi(t))^{-1}]X(t)$ .   
 (c)  $X'(t) = [B(t)]X(t)$ .       (d)  $X'(t) = [(\phi(t))^{-1}B(t)]X(t)$ .

**Solució:** (a)

**Resolució:** a)  $\det(\phi^{-1}\psi) = \frac{1}{\det \phi} \det \psi \neq 0$  ( $\phi$  i  $\psi$  matrius fonamentals).

b) Tenint en compte que  $\phi\phi^{-1} = Id \Rightarrow \phi'\phi^{-1} + \phi(\phi^{-1})' = 0 \Rightarrow (\phi^{-1})' = -\phi^{-1}\phi'\phi^{-1}$ . Aleshores, derivant la matriu fonamental  $\phi^{-1}\psi$ , tenim que:

$$(\phi^{-1}\psi)' = (\phi^{-1})'\psi + \phi^{-1}\psi' = -\phi^{-1}\phi'\phi^{-1}\psi + \phi^{-1}\psi' = -\phi^{-1}A\phi\phi^{-1}\psi + \phi^{-1}(A+B)\psi = \phi^{-1}B\psi = \phi^{-1}B\phi(\phi^{-1}\psi)$$

3. Si  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  és solució del problema de valor inicial  $X' = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} X$ ,  $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , per a quins  $t > 0$  es té que  $x_1(t) < x_2(t)$ ?

- (a) Per a tot  $t > 0$ .       (b) Per a  $t > 2$ .       (c) Per a  $t > 10$ .       (d) Mai.

**Solució:** (d)

**Resolució:**  $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$  i  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{0.1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t + e^{0.1t} \\ e^t - e^{0.1t} \end{pmatrix}$ . Llavors,  $x_1(t) < x_2(t) \Leftrightarrow 2e^t + e^{0.1t} < e^t - e^{0.1t} \Leftrightarrow e^t + 2e^{0.1t} < 0 \Rightarrow$  impossible.

4. Sigui  $x(t)$  la posició d'una massa a temps  $t$  donada per la solució del problema de valors inicials  $\begin{cases} x'' + 2x' + x = \cos t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = a \end{cases}$ , on  $a \in \mathbb{R}$ . Quina ha de ser la velocitat inicial  $a$ , perquè  $x(\pi) = 0$ ?

- (a)  $-1 - \pi$ .       (b)  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$ .       (c)  $1 + \pi$ .       (d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$ .

**Solució:** (b)

**Resolució:** La solució general de l'equació diferencial ordinària ve donada per  $x_G(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t$ . Imposant les condicions inicials resulta que

$$\left. \begin{matrix} 1 = x(0) = c_1 \\ a = x'(0) = c_2 - c_1 + 1/2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = a + 1/2 \end{cases}$$

Aleshores,  $0 = x(\pi) = (1 + (1/2 + a)\pi)e^{-\pi} \Rightarrow a = -1/\pi - 1/2$ .

5. Quin és l'ordre mínim de l'equació diferencial ordinària lineal homogènia a coeficients constants que té per solució general  $y(x) = c_1x + c_2e^{-3x} + c_3x \cos^2 2x + c_4 \sin 4x$ ?

- (a) 7.       (b) 8.       (c) 9.       (d) 6.

**Solució:** (a)

**Resolució:** Tenint en compte que  $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ , un conjunt de solucions serà  $\{x, e^{-3x}, x \cos 4x, \sin 4x\}$ .

Si indiquem per  $p(x)$  el polinomi característic de l'equació diferencial ordinària, resulta que:

- $x$  solució:  $\Rightarrow 0$  serà arrel de  $p(x)$  amb multiplicitat 2 (\*).
- $e^{-3x}$  solució:  $\Rightarrow -3$  serà arrel de  $p(x)$  amb multiplicitat 1 (\*).
- $x \cos 4x$  solució:  $\Rightarrow \pm 4i$  serà arrel de  $p(x)$  amb multiplicitat 2 (\*).
- $\sin 4x$  solució:  $\Rightarrow \pm 4i$  serà arrel de  $p(x)$  amb multiplicitat 1 (inclòs en el cas anterior).

Sumant les multiplicitats marcades amb (\*) l'ordre mínim és  $2 + 1 + 2 \cdot 2 = 7$ .