**Equations Diferencials** **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora 2 d'Abril de 2004

**Test**

1. Donat un sistema lineal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, amb $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matriu constant, la matriu $\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2+t \end{pmatrix}$

   (a) Pot ser una matriu fonamental. (b) No pot ser matriu fonamental.

   **Resolució:** $\det \Phi(t) \neq 0$; $\Phi' = A\Phi \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + 2b + bt = 1 \\ d = 1 \\ c + 2d + dt = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ d = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi(t)$ pot ser matriu fonamental $\Rightarrow$ (a).

---

2. Si $\{x, x^2\}$ és un conjunt fonamental de l'equació diferencial ordinària $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0\,,$ (1) aleshores un conjunt fonamental del sistema de primer ordre equivalent a (1) és:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. ☐ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3/3 \end{pmatrix} \right\}$. ☐

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \right\}$. ☐ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 2x + 1 \end{pmatrix} \right\}$. ☐

   **Resolució:** El sistema de primer ordre associat és $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,,$ (2), on $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ amb $y$ solució de (1). Per tant, si $x$ solució de (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ és solució de (2); si $x^2$ solució de (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$ és solució de (2) $\Rightarrow$ per linealitat, $\begin{pmatrix} x^2 + x \\ 2x + 1 \end{pmatrix}$ és solució de (2) i $W\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 2x + 1 \end{pmatrix}\right] \neq 0 \Rightarrow$ (d).

---

3. Sigui $x(t)$ una solució no nul·la de $x'' + 2kx' + \omega^2 x = 0$ tal que $x(0) = 0$. Si aquesta oscil·lació és críticament esmorteïda, aleshores $x'(t_0) = 0$ si i només si:

   (a) $t_0 = 2k$. ☐ (b) $t_0 = 1/2k$. ☐ (c) $t_0 = 2/k$. ☐ (d) $t_0 = 1/k$. ☐

   **Resolució:** Oscil·lació críticament esmorteïda $\Rightarrow k = w$ i la solució general ve donada per $x_G(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-kt}$. Si $x(0) = 0$ i $x \not\equiv 0 \Rightarrow c_1 = 0$ i $c_2 \neq 0 \Rightarrow x(t) = c_2 t e^{-kt}$. Imposant que $x'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 1/k \Rightarrow$ (d).

---

4. Si apliquem el mètode de Picard per resoldre el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = x^2 - y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ s'obté que $y_2(x)$ és igual a:

   (a) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^{10}}{27}$. ☐ (b) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{12}$. ☐ (c) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^{10}}{270}$. ☐ (d) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{27}$. ☐

   **Resolució:** L'algorisme de Picard en aquest cas s'escriu
   $\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^x F(s, y_n(s))ds \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \left[s^2 - (y_n(s))^3\right] ds \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = \dfrac{x^3}{3} \Rightarrow y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^{10}}{270} \Rightarrow$ (c).

---

5. L'equació diferencial ordinària lineal i homogènia a coeficients constants d'ordre mínim que té per solucions $\{1, x, x^2, \cos(4x), e^x\}$ és:

   (a) $y^{\text{VI)}} - y^{\text{V)}} + 16y^{\text{IV)}} - 16y^{\text{III)}} = 0$. ☐ (b) $y^{\text{VI)}} - y^{\text{V)}} + 4y^{\text{IV)}} - 4y^{\text{III)}} = 0$. ☐

   (c) $y^{\text{VI)}} - y^{\text{V)}} - 16y^{\text{IV)}} + 16y^{\text{III)}} = 0$. ☐ (d) $y^{\text{VI)}} - y^{\text{V)}} - 4y^{\text{IV)}} + 4y^{\text{III)}} = 0$. ☐

   **Resolució:** Mirem quins operadors anul·len cada funció: $1 \to D$, $x \to D^2$, $x^2 \to D^3$, $\cos 4x \to D^2 + 16$, $e^x \to D - 1$. L'operador lineal d'ordre mínim que anul·la totes les funcions és el m.c.m. dels anteriors, és a dir, $D^3(D^2 + 16)(D - 1) = D^6 - D^5 + 16D^4 - 16D^3 \Rightarrow$ (a).