Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **Test** 9 d'Abril de 2003

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....

NOTA: $\square$

Marqueu amb $\boxtimes$ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Sigui $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$ un sistema lineal d'equacions diferencials ordinàries amb $\Phi(t)$ matriu fonamental. Considerem $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu constant amb $\det B \neq 0$. Aleshores si $\Psi(t) = B\Phi(t)$ tenim:

   (a) $\Psi(t)$ sempre és matriu fonamental del sistema. $\square$
   (b) $\Psi(t)$ no és mai matriu fonamental del sistema. $\square$
   (c) Si $b = c$ i $a = d$ aleshores $\Psi(t)$ és matriu fonamental del sistema. $\square$
   (d) Si $a + b = 1$ i $c + d = 1$ aleshores $\Psi(t)$ sempre és matriu fonamental del sistema. $\blacksquare$

   Resolució: $\Psi(t) = B\Phi(t)$ és matriu fonamental $\Leftrightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Psi$ i $\det \Psi \neq 0$. Ara bé, $\det \Psi = \det B \det \Phi \neq 0$, per tant només cal que $(B\Phi)' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B\Phi \Leftrightarrow$

   $$\Leftrightarrow B\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B\Phi \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B\Phi \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b = c \\ a = d \end{matrix}.$$

---

2. Sigui y_3 el valor aproximat de $y(3/2)$ obtingut aplicant el mètode d'Euler amb pas $h = 1/2$ al problema de valor inicial $y' = y^2 - \alpha x$, $y(0) = 0$, on α és un paràmetre real. L'únic valor de $\alpha > 0$ per al qual es té que $y_3 = 0$ compleix que

   (a) $0 < \alpha < 1$. $\square$ (b) $1 \leq \alpha \leq 16$. $\square$ (c) $16 < \alpha < 32$. $\blacksquare$ (d) $32 \leq \alpha$. $\square$

   Resolució: Euler: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1/2 \\ y_{n+1} = y_n + 1/2(y_n^2 - \alpha x_n) \end{cases}$ amb $x_0 = 0$, $y_0 = 0 \Rightarrow$

   $$\begin{cases} x_1 = x_0 + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2 \\ y_1 = y_0 + 1/2(y_0^2 - \alpha x_0) = 0 + 1/2(0^2 - \alpha \cdot 0) = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1/2 = 1/2 + 1/2 = 1 \\ y_2 = y_1 + 1/2(y_1^2 - \alpha x_1) = 0 + 1/2(0^2 - \alpha \cdot 1/2) = -\alpha/4 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x_3 = x_2 + 1/2 = 1 + 1/2 = 3/2 \\ y_3 = y_2 + 1/2(y_2^2 - \alpha x_2^2) = -\alpha/4 + 1/2((\alpha^2/16) - \alpha) = \dfrac{\alpha^2}{32} - \dfrac{3}{4}\alpha \end{cases}$$

   Per tant, $y(3/2) \simeq y_3 = \dfrac{\alpha^2}{32} - \dfrac{3}{4}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ i $\alpha = 24$.

---

3. Considereu l'equació diferencial ordinària $x'' + kx' + 2x = 1$, amb $k > 0$. Si $x(t)$ és una solució de l'equació podem afirmar que

(a) $\lim_{t\to+\infty} (x(t) - 1/2) = 0$. ■ (b) No existeix $\lim_{t\to+\infty} (x(t) - 1/2)$. □
(c) $\lim_{t\to+\infty} (x(t) - 1/2) = k$. □ (d) $\lim_{t\to+\infty} (x(t) - 1/2) = +\infty$. □

Resolució: Observem que $x_0(t) = 1/2$ és l'única solució periòdica de l'equació diferencial ordinària (oscil·lació forçada esmorteïda). Efectivament, com que el terme independent és constant, la solució periòdica ha de ser una constant i en aquest cas, $(1/2)'' + k(1/2)' + 2(1/2) = 1$. Aleshores si $x(t)$ és una solució qualsevol de l'equació diferencial ordinària, sabem que $\lim_{t\to+\infty} (x(t) - x_0(t)) = 0$.

---

4. Donada l'equació diferencial ordinària $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0$, llavors:

(a) Existeixen solucions periòdiques no nul·les. □
(b) Existeix una única solució $y(t)$ tal que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. □
(c) Tota solució és acotada en $\mathbb{R}$. □
(d) Si $y(t) \neq 0$, aleshores $\lim_{t\to-\infty} |y(t)| = +\infty$. ■

Resolució: Equació característica: $2m^3 + 7m^2 + 7m + 2 = 0$. Arrel: $m = -1$ (comprovació directa).
Ruffini: $2m^3 + 7m^2 + 7m + 2 = (m + 1)(2m^2 + 5m + 2)$.
$2m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1/2$ o $m = -2$.
Solució general: $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-1/2t} + Ce^{-2t}$, $\lim_{t\to-\infty} |y(t)| = +\infty$.

---

5. L'equació diferencial ordinària que té com a conjunt fonamental el conjunt de funcions $\{e^{2x}, e^{-2x}, x\sinh(2x), x\cosh(-2x), \sin(-2x), \cos(2x)\}$ és:

(a) $y^{\mathrm{VI})} - 4y^{\mathrm{IV})} - 16y^{\mathrm{II})} + 64y = 0$. ■ (b) $y^{\mathrm{VI})} + 4y^{\mathrm{IV})} - 16y^{\mathrm{II})} + 64y = 0$. □
(c) $y^{\mathrm{VI})} - 4y^{\mathrm{IV})} + 16y^{\mathrm{II})} + 64y = 0$. □ (d) $y^{\mathrm{VI})} + 4y^{\mathrm{IV})} + 16y^{\mathrm{II})} + 64y = 0$. □

Resolució: Tenim $x\sinh(2x) = x\dfrac{(e^{2x} - e^{-2x})}{2}$; $x\cosh(-2x) = x\dfrac{(e^{2x} + e^{-2x})}{2}$.
Sigui $P(D)$ l'operador anul·lador de grau mínim d'aquest conjunt de funcions. $P(D)$ ha de tenir les arrels: 2 (doble), -2 (doble), $2i$, $-2i$.
Així, $P(D) = (D - 2)^2(D + 2)^2(D - 2i)(D + 2i) = D^6 - 4D^4 - 16D^2 + 64$.
Per tant, l'equació diferencial ordinària que té aquestes funcions com a conjunt fonamental és:
$y^{\mathrm{VI})} - 4y^{\mathrm{IV})} - 16y^{\mathrm{II})} + 64y = 0$.
