Equacions Diferencials

Codi: 22701 **B**

Temps: 1 hora **Test** 12 d'abril de 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:**

Marqueu amb ⊠ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. L'equació diferencial ordinària $x'' + \pi^2 x = \sin(\beta t)$ **NO** té solucions periòdiques si i només si:
   a. $\beta \notin \mathbb{Q}$. ☐ b. $\beta = \pm\pi$. ⊠
   c. $\beta \in \mathbb{Q}$. ☐ d. $\beta = \pi/m$, $m \in \mathbb{N}$. ☐

   Solució: Donada una funció periòdica $b(t)$ amb periode mínim p, l'edo $x''+\omega^2 x = b(t)$ sempre té alguna solució periòdica, excepte quan es produeix el fenòmen de resonància no esmorteïda. Aquest fenòmen es dóna si i només si $p/p_0 \in \mathbb{Z}$, essent $p_0 = 2\pi/\omega$, i, a més, les integrals

$$\int_0^p \cos(\omega t) b(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^p \sin(\omega t) b(t)\,\mathrm{d}t$$

   no s'anul·len simultàniament.

   En el nostre cas $\omega = \pi$, $p_0 = 2\pi/\omega = 2$, $b(t) = \sin(\beta t)$, $p = 2\pi/\beta$ i $p/p_0 = \pi/\beta$. Per tant, $p/p_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta = \pi/m, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Sigui, doncs, $\beta = \pi/m$ amb m un enter no nul. Finalment, estudiem per a quins enters $m \neq 0$ les integrals

$$\int_0^{2m} \cos(\pi t)\sin(\pi t/m)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{2m} \sin(\pi t)\sin(\pi t/m)\,\mathrm{d}t$$

   no s'anul·len simultàniament. La primera integral és igual a zero per a tot enter $m \neq 0$. La segona integral és diferent de zero si i només si $m = \pm 1$.

---

2. Sigui $X(t)$ la solució del problema de Cauchy $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X$, $X(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de t_0 s'anul·la la segona component del vector $X(2)$?
   a. $t_0 = 0$. ☐ b. $t_0 = 1$. ⊠
   c. $t_0 = -1$. ☐ d. $t_0 = 3$. ☐

   Solució: L'escalar $\lambda = 2$ és un VAP doble de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La matriu A no diagonalitza, ja que $A - 2\cdot\mathrm{Id} \neq \mathbf{0}$. Els vectors $v_1 = (1,0)$ i $v_2 = (A - 2\cdot\mathrm{Id})\,v_1 = (0,3)$ formen una base de Jordan. Per tant,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tJ}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}.$$

   La solució del problema de Cauchy $\dot{X} = AX$, $X(t_0) = X_0$, és $X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0$. Aleshores,

$$X(2) = \mathrm{e}^{(2-t_0)A}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 - 3t_0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{4-2t_0}$$

   i la resposta és $t_0 = 1$.

3. Sigui $x(t)$ la solució del problema de Cauchy $x'' + 2x' + 2x = 0$, $x(0) = \sqrt{2}/2$, $x'(0) = 0$. Considereu la successió $(x_k)_{k\geq 0}$ de tots els màxims relatius de $x(t)$ per a $t \geq 0$. Aleshores:
   a. $x_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}/2$. ☐ b. $x_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2k\pi}/2$. ☒
   c. $x_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/2$. ☐ d. $x_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-(2k+1/4)\pi}/2$. ☐

   Solució: Tenim una oscil·lació esmorteïda lliure amb $\omega = \sqrt{2}$ i $\kappa = 1$. Com $0 < \kappa < \omega$, l'oscil·lació és sub-esmorteïda i la solució $x(t)$ té infinits màxims i mínims locals entrellaçats. En els màxims la solució és positiva. En els mínims és negativa.

   El polinomi característic de l'edo $x'' + 2x' + 2x = 0$ és $P(m) = m^2 + 2m + 2$, amb arrels complexes conjugades $m_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$. La solució general de l'edo és

$$x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\,\mathrm{e}^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   Tot imposant les condicions inicials, obtenim $\sqrt{2}/2 = x(0) = c_1$ i $0 = x'(0) = c_2 - c_1$. Per tant, $c_1 = c_2 = \sqrt{2}/2$ i la solució del problema de Cauchy és $x(t) = \sqrt{2}(\cos t + \sin t)\,\mathrm{e}^{-t}/2$.

   Ara cerquem els punts on s'anul·la la derivada de la solució:

$$x'(t) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin t = 0 \Longleftrightarrow t = t_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

   Llavors, $x(t_n) = x(n\pi) = \sqrt{2}(-1)^n\mathrm{e}^{-n\pi}/2$, amb $n \in \mathbb{Z}$. Quan n és senar, $x(t_n) < 0$ i la solució té un mínim local al punt $t = t_n$. Quan $n = 2k$ és parell, $x_k = x(t_{2k}) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2k\pi}/2 > 0$ i la solució té un màxim local al punt $t = t_{2k} = 2k\pi$.

---

4. Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària no homogènia $y''' - 2y'' + 2y' = x + 1$.
   a. $y_{\mathrm{g}}(x) = A\mathrm{e}^x \sin x + B\mathrm{e}^x \cos x + C + x + x^2/4$. ☒
   b. $y_{\mathrm{g}}(x) = A \sin x + B \cos x + C + x + x^2/4$. ☐
   c. $y_{\mathrm{g}}(x) = A\mathrm{e}^x \sin x + B\mathrm{e}^x \cos x + C + 4x + x^2$. ☐
   d. $y_{\mathrm{g}}(x) = A \sin x + B \cos x + C + 4x + x^2$. ☐

   Solució: El polinomi característic de l'edo homogènea és $P(m) = m^3 - 2m^2 + 2m$. Les seves arrels son $m_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$ i $m_3 = 0$. Per tant, la solució general de l'edo homogènea és

$$y_{\mathrm{h}}(x) = (A\cos x + B\sin x)\,\mathrm{e}^x + C \qquad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

   A més, $y_{\mathrm{p}}(x) = x + x^2/4$ és una solució particular de l'edo no homogènea per substitució directa.

---

5. Considerem l'equació diferencial ordinària $y''' + x^2y'' + (x-1)y' + xy = x^3 + 1$ amb les condicions inicials $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$. Calculeu el valor aproximat de $y'(1)$ mitjançant el mètode d'Euler amb pas $h = 0.5$.
   a. $y'(1) = 0.25$. ☒ b. $y'(1) = 0.75$. ☐
   c. $y'(1) = 1$. ☐ d. $y'(1) = 0$. ☐

   Solució: Treballant amb les variables $z = y'$, $w = y''$ i $Y = (y, z, w)$, obtenim el sistema

$$Y' = F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ w \\ -x^2w + (1-x)z - xy + x^3 + 1 \end{pmatrix} \qquad Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   El mètode d'Euler amb pas h proporciona unes aproximacions Y_n de la solució $Y(x)$ del sistema avaluada als punts $x_n = x_0 + hn$, per a tot enter n. Prenent $x_0 = 0$ i $h = 0.5$, obtenim

$$Y(0.5) \simeq Y_1 = Y_0 + hF(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad Y(1) \simeq Y_2 = Y_1 + hF(x_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}.$$

   Aleshores, $y'(1) = z(1) \simeq 0.25$.