Equacions Diferencials

Codi: 22701 **B**

Temps: 1 hora | **Test** | 6 d'Abril de 2001

NOM: . . . .
COGNOMS: . . . .
DNI: . . . .
GRUP: . . . .

NOTA: ☐

Marqueu amb ☒ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.

1. Trobeu l'equació diferencial ordinària lineal homogènia d'**ordre mínim** que té per solucions $\{\cos^2 t, \sin^2 t, \cos 2t\}$, $t \in (0, \pi/2)$.

(a) $(\sin 2t)x''(t) - 2(\cos 2t)x'(t) = 0$. ☒ (b) $x''(t) - (\cos t)x'(t) = 0$. ☐
(c) $x''(t) - \tan(2t)x'(t) = 0$. ☐ (d) $\cos(2t)x''(t) - 2\sin(2t)x'(t) = 0$. ☐

Solució: Totes quatre equacions són de la forma $a_2(t)x'' + a_1(t)x' = 0$. La funció $x(t) = \cos 2t$ és solució d'una equació d'aquest tipus si i només si $4a_2(t)\cos 2t + 2a_1(t)\sin 2t = 0$, és a dir, si i només si

$$\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = -2\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{-2}{\tan 2t}.$$

Per tant, les opcions (b), (c) i (d) no són correctes i la resposta ha de ser (a). (Nota: També es pot fer buscant l'edo, pero surt més llarg.)

---

2. Considereu el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = \alpha y(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{cases}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $z_0 \neq 0$. Sigui $(y_2(x), z_2(x))$ el segon iterat pel mètode de Picard, de la solució del sistema de primer ordre associat. El valor de α tal que $(y_2(0), z_2(0)) = (y_2(1), z_2(1))$ és:

(a) $\alpha = 1$. ☐ (b) $\alpha = 4$. ☒ (c) $\alpha = 2$. ☐ (d) $\alpha = -1$. ☐

Solució: Com que el sistema de primer ordre associat és

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z \\ \alpha y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

llavors les iteracions de Picard venen donades per

$$\begin{pmatrix} y_0(x) \\ z_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_{n+1}(x) \\ z_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} z_n(t) \\ \alpha y_n(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t, \qquad n \geq 0.$$

Les dues primeres iteracions són

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + z_0 x \\ y_0 \alpha x + z_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0(1 + \alpha x^2/2) + z_0 x \\ y_0 \alpha x + z_0(1 + \alpha x^2/2) \end{pmatrix}.$$

Les equacions $y_0 = y_2(0) = y_2(1) = (1 + \alpha/2)y_0 + z_0$ i $z_0 = z_2(0) = z_2(1) = \alpha y_0 + z_0(1 + \alpha/2)$ impliquen que

$$z_0(1 - \alpha/4) = 0.$$

Així doncs, $\alpha = 4$, ja que $z_0 \neq 0$.

---

3. Considereu el sistema d'equacions diferencials $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t + \sin 3t + 1 \end{pmatrix}$. L'equació diferencial ordinària de segon ordre equivalent a aquest sistema té:

(a) Infinites solucions periòdiques de període mínim 2π. ☐
(b) Una única solució periòdica de període mínim 2π. ☒
(c) Cap solució periòdica. ☐
(d) Infinites solucions periòdiques de període mínim π. ☐

Solució: L'edo de segon ordre equivalent a aquest sistema és $y''+y'+y = \cos 2t+\sin 3t+1$. Aquesta equació és una oscil·lació periòdicament forçada amb fregament. Les oscil·lacions periódicament forçades amb fregament tenen una única solució periódica: el règim permanent.

Llavors, les opcions (a), (c) i (d) no són correctes i la resposta ha de ser (b).

---

4. Les oscil·lacions verticals de dos cubs A i B de mateixa mida i de masses m_A i m_B posats en una piscina venen modelades per les equacions diferencials ordinàries $m_A x_A'' + \ell^2 g x_A = 0$ i $m_B x_B'' + \ell^2 g x_B = 0$ respectivament, on ℓ és la longitud de l'aresta dels cubs i g la força de gravetat. Si el cub A oscil·la el doble de ràpid que el cub B, llavors:

(a) $m_A = 2m_B$. ☐ (b) $m_A = 4m_B$. ☐ (c) $m_B = 2m_A$. ☐ (d) $m_B = 4m_A$. ☒

Solució: La freqüència de la oscil·lació $m_A x_A'' + \ell^2 g x_A = 0$ és $\omega_A = \ell\sqrt{g/m_A}$. La freqüència de la oscil·lació $m_B x_B'' + \ell^2 g x_B = 0$ és $\omega_B = \ell\sqrt{g/m_B}$. Si el cub A oscil·la el doble de ràpid que el cub B, llavors

$$\ell\sqrt{g/m_A} = \omega_A = 2\omega_B = 2\ell\sqrt{g/m_B}.$$

Per tant, $m_B = 4m_A$.

---

5. Si $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són dues solucions de l'equació $x'' + t^2 x' = 1$, aleshores:

(a) $x_1 - x_2$ també és solució. ☐
(b) $x_1 + x_2$ és solució de l'equació diferencial ordinària homogènia associada. ☐
(c) $2x_1 - x_2$ també és solució. ☒
(d) No podem dir res ja que no és a coeficients constants. ☐

Solució: La funció $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ és solució de la edo

$$x'' + t^2 x' = c_1(x_1'' + t^2 x_1') + c_2(x_2'' + t^2 x_2') = c_1 + c_2.$$

Aquesta equació és la mateixa que la equació original si i només si $c_1 + c_2 = 1$. Per tant, la resposta correcta es (c).
