Teoría de Ecuaciones Diferenciales (29 de junio de 2004)

(a) Escribe el problema de valor inicial que modela el movimiento de una cuerda vibrante infinita.

(b) Escribe la ecuación de Laplace en una región cuadrada de lado dos centrada en el origen con las siguientes condiciones de Dirichlet: el valor de la función en cada punto de la frontera es igual a la distancia del punto al centro del cuadrado.

(c) Escribe la ecuación del calor en una barra de longitud π, con condiciones de Neumann homogéneas y tal que la temperatura inicial sea constante e igual a uno.

Respuesta:

(a) El problema de valor inicial que modela el movimiento de una cuerda vibrante infinita es:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $u(x,t)$ es el desplazamiento desde la posición de equilibrio del punto x de la cuerda en el instante t. La constante $c > 0$ depende del material que constituye la cuerda.

(b) Una región de las características descritas es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\}$. La ecuación de Laplace en la región D con las condiciones de Dirichlet pedidas en la frontera ∂D es:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & |x| < 1 \quad |y| < 1 \\ u(x, \pm 1) = \sqrt{1+x^2} & |x| < 1 \\ u(\pm 1, y) = \sqrt{1+y^2} & |y| < 1 \end{cases}.$$

(c) Un problema con la ecuación del calor y las condiciones pedidas puede ser:

$$\begin{cases} u_t - \kappa^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x de la barra en el instante t. La constante $\kappa > 0$ depende del material que constituye la barra.