

## Sistemas No Lineales

Ya sabemos resolver sistemas lineales, determinar su estabilidad y dibujar sus trayectorias. Ahora pasamos a estudiar sistemas no lineales autónomos de primer orden expresados en forma normal. Concretamente, sistemas de la forma

$$X' = F(X)$$

donde el término no lineal  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

En este tema es útil recordar que una curva es una solución del sistema si y sólo si la curva es tangente en todos sus puntos al campo de vectores asociado al sistema y, además, que por cada posición inicial  $X_0 \in D$  pasa una única órbita del sistema (teorema de existencia y unicidad).

**Puntos de equilibrio inestables, estables y asintóticamente estables.** La siguiente definición es una copia del caso lineal.

**Definición.** Diremos que un punto  $X_0 \in D$  es un *punto de equilibrio, crítico, estacionario* o *fijo* del sistema  $X' = F(X)$  cuando la velocidad del sistema en ese punto sea cero. Es decir, cuando  $F(X_0) = \vec{0}$ .

Si  $X_0$  es un punto de equilibrio, la función constante  $X(t) \equiv X_0$  es una solución del SNL, pues

$$X'(t) = \vec{0} = F(X_0) = F(X(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La pregunta que nos hacemos ahora es, dado un punto de equilibrio de un SNL, ¿cómo se comportan las trayectorias del SNL que parten de puntos cercanos al punto de equilibrio? A grosso modo, diremos que un punto de equilibrio es estable o asintóticamente estable cuando las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanas no se alejan de él o tienden a él, respectivamente. Y es inestable cuando no es estable; es decir, cuando existen trayectorias que se alejan del punto de equilibrio aunque partan de puntos muy próximos. Sin embargo, la definición formal es algo más técnica.

**Definición.** Sea  $X_0 \in D$  un punto de equilibrio del sistema  $X' = F(X)$ . Diremos que ese punto es:

- *Estable (E)* si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que

$$\|X(0) - X_0\| \leq \delta \implies \|X(t) - X_0\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0.$$

Aquí,  $X(t)$  denota a una trayectoria cualquiera del sistema.

- *Asintóticamente estable (AE)* si y sólo si es estable y, además, existe  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\|X(0) - X_0\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X_0.$$

- *Inestable (I)* cuando no es estable.

Estas definiciones son parecidas, pero no iguales, a las dadas en el caso de SLs. Conviene entender las diferencias. La primera diferencia es que son los propios SLs los que se definían como I, E o AE, pero al trabajar con SNLs son sus puntos de equilibrio los que se definen como tales. En particular, un SNL puede tener simultáneamente puntos de equilibrio estables e inestables. Veremos un ejemplo de esta convivencia al estudiar la ecuación logística en la siguiente sección. Otra diferencia importante es el carácter local que tienen las definiciones en el caso no lineal, en contraposición al carácter global del caso lineal. Por ejemplo, si un SL es AE, todas sus trayectorias tienden al origen. En cambio, dado un punto de equilibrio AE de un SNL, tan sólo podemos afirmar que tienden a él las trayectorias que empiezan suficientemente cerca de ese punto, en un zona que recibe el nombre de *cuenca de atracción*.

**El retrato de fases de SNLs 1D.** Empezamos por los SNLs más simples posibles: los sistemas 1D autónomos. Es decir, consideramos EDOs no lineales de la forma

$$x' = f(x)$$

donde el término no lineal  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^1$  en un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$ .

Si  $x(t)$  es la solución del PVI  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , entonces se cumple que:

- $f(x_0) > 0 \implies x(t)$  es creciente en  $t = 0$  y el campo de vectores en  $x_0$  apunta a la derecha;
- $f(x_0) < 0 \implies x(t)$  es decreciente en  $t = 0$  y el campo de vectores en  $x_0$  apunta a la izquierda;
- $f(x_0) = 0 \implies x(t) \equiv x_0$  y  $x_0$  es un punto de equilibrio.

En particular, la estabilidad de un punto de equilibrio  $x_0$  se puede deducir mirando el signo de la función  $f(x)$  cuando  $x \gtrsim x_0$  y cuando  $x \lesssim x_0$ , lo cual permite determinar como es el campo de vectores a ambos lados de  $x_0$ . Por tanto, en los sistemas 1D pueden aparecer puntos de equilibrio que son inestables por un lado y asintóticamente estables por el otro lado.

*Ejercicio.* Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de la EDO  $x' = f(x)$ . Probar que:

- $f'(x_0) > 0 \implies x_0$  es inestable (por ambos lados).
- $f'(x_0) < 0 \implies x_0$  es asintóticamente estable (por ambos lados).

*Ejercicio.* Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender los applets de JAVA sobre *Phase lines*.

*Problemas relacionados.* (Ecuación logística) y (Sistema desacoplado).

**Estabilidad de puntos de equilibrio por linealización.** La idea detrás del método de linealización para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio de un SNL autónomo consiste en construir un SL homogéneo a coeficientes constantes que “se parezca” al SNL original en las proximidades del punto de equilibrio, con la esperanza (no siempre fundada) de que el comportamiento dinámico de ambos sistemas sea “el mismo”.

**Definición.** Sea  $X_0 \in D$  un punto de equilibrio del SNL  $X' = F(X)$ . Entonces, diremos que

$$A = DF(X_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

es la matriz del *sistema linealizado* de  $X' = F(X)$  en el punto  $X_0$ .

Este concepto es clave para estudiar la estabilidad de SNLs. Damos el siguiente teorema sin probarlo.

**Teorema.** *Sea  $A$  la matriz del sistema linealizado de un SNL en un punto de equilibrio. Entonces:*

- *Si  $A$  tiene algún VAP de parte real positiva, el punto de equilibrio es I.*
- *Si todos los VAPs de  $A$  tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es AE.*
- *En los otros casos, la linealización no decide la estabilidad.*

*Observación.* Cuando  $A$  no tiene ningún VAP de parte real nula, la trayectorias del SNL en las proximidades del punto de equilibrio tienen el “mismo” aspecto que las trayectorias del sistema linealizado. Esto no significa que si existe algún VAP de parte real nula, la linealización no decide la estabilidad.

Existen cinco tipos de SLs 2D homogéneos a coeficientes constantes: sillas, nodos, focos, centros y los sistemas degenerados. Sólo los centros y los sistemas degenerados tienen VAPs con parte real nula. Por tanto, si el sistema linealizado de un SNL en un punto de equilibrio es una silla, nodo o foco, podremos decir cómo son las trayectorias del SNL cerca del punto de equilibrio. Por ejemplo, si el SL asociado es una silla, el SNL tiene unas curvas de entrada y salida (tangentes en el punto de equilibrio a las rectas de entrada y salida del SL asociado) que organizan su dinámica local entorno a ese punto. En el argot técnico, esas curvas se denominan *curvas invariantes estable e inestable*. El término invariante enfatiza que si tomamos una condición inicial arbitraria sobre una de esas curvas, la trayectoria sigue la curva.

*Ejemplo 1.* El origen es un punto de equilibrio del sistema 2D no lineal

$$\begin{cases} x_1' &= x_2(x_1 - 1) \\ x_2' &= x_1(1 - x_1) \end{cases}.$$

La matriz del sistema linealizado en el origen es

$$A = \left( \begin{array}{cc} x_2 & x_1 - 1 \\ 1 - 2x_1 & 0 \end{array} \right)_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos VAPs son complejos conjugados de parte real nula:  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Por tanto, la linealización no decide la estabilidad y tampoco sabemos que aspecto tienen las trayectorias del SNL cerca del origen, tan sólo podemos decir que el sistema linealizado es un centro.

*Ejercicio.* Queremos entender el significado del sistema linealizado mediante un ejemplo. Para eso, vamos a ver que el SNL anterior tiende a su sistema linealizado cuando hacemos un zoom cada vez mayor sobre el origen. Concretamente, consideramos el cambio de escala

$$x_1 = \epsilon y_1, \quad x_2 = \epsilon y_2, \quad \epsilon > 0.$$

Cuando  $\epsilon \ll 1$ , el cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  en las nuevas coordenadas  $(y_1, y_2)$  se corresponde con el minúsculo cuadrado  $[-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$  en las coordenadas originales  $(x_1, x_2)$ . Realizando este cambio de escala, el SNL del ejemplo anterior se transforma en el SNL

$$\begin{cases} y_1' &= y_2(\epsilon y_1 - 1) \\ y_2' &= y_1(1 - \epsilon x_1) \end{cases}.$$

Finalmente, tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , el SNL transformado tiende al SL dado por

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{cases}.$$

Es decir, hemos obtenido el SL  $Y' = AY$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matriz calculada anteriormente.

*Ejercicio.* Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y jugar con el applet de JAVA sobre *Vector Fields*. En particular, usar el zoom de ese applet para comprobar que los sistemas no lineales se parecen a sus sistemas linealizados entorno cada uno de sus puntos de equilibrio.

*Ejercicio.* El punto  $(1, 1)$  también es un punto de equilibrio del SNL anterior. Calcular la matriz del sistema linealizado en ese punto. ¿Qué podemos decir sobre la estabilidad del SNL?

*Ejemplo 2.* El origen es un punto de equilibrio del sistema 3D de Lorenz

$$\begin{cases} x_1' &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x_2' &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_3' &= x_1x_2 - \beta x_3 \end{cases}$$

donde  $\sigma, \rho, \beta > 0$  son parámetros del sistema. Para simplificar, supondremos que  $\rho > 1$ .

La matriz del sistema linealizado en el origen es

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

cuyos tres VAPs son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Como  $\lambda_1 > 0$ , el origen es inestable. Y como  $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ , el origen tiene una dimensión inestable (una curva de salida) y dos dimensiones estables (una superficie de entrada). De hecho, el eje vertical (es decir, el eje correspondiente a la coordenada  $x_3$ ) es una recta de entrada. (¿Por qué?) Las trayectorias cerca del origen no giran, pues todos los VAPs son reales.

*Problemas relacionados.* (Pb1 Junio 2007) y (Sistema de Lorenz).

**Estabilidad de puntos de equilibrio por el método de Liapounov.** El método de Liapounov puede proporcionar información cuando el método de linealización no sirve para decidir la estabilidad. Consiste en construir una función  $V(X)$  que “mide” la distancia al punto de equilibrio (por ejemplo,  $V(X) = \|X - X_0\|^2$ ), para después estudiar si el valor de esa función aumenta, no aumenta o disminuye a lo largo de las trayectorias del sistema, en cuyo caso el punto de equilibrio será inestable, estable o asintóticamente estable, respectivamente. Así pues, para aplicar esta idea, necesitamos dos cosas:

- Saber qué funciones  $V(X)$  “miden” la distancia al punto de equilibrio; y
- Estudiar la variación del valor de la función  $V(X)$  sobre las trayectorias del SNL  $X' = F(X)$ .

Empezamos por el segundo punto. Sea  $W(X)$  la función definida mediante la fórmula

$$W(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle,$$

donde  $\nabla V$  denota el gradiente de la función  $V$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar. Ahora dada una trayectoria cualquiera  $X(t)$  del SNL, aplicamos la regla de la cadena para calcular la derivada de la composición  $V(X(t))$  respecto al tiempo  $t$ . Usando la notación  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , vemos que

$$\frac{d}{dt} \{V(X(t))\} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(X(t))x'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(X(t))x'_n(t) = \langle \nabla V(X(t)), X'(t) \rangle = W(X(t)).$$

En la última igualdad hemos usado que  $X(t)$  es una solución del SNL. Es decir, que  $X'(t) = F(X(t))$ . Por tanto, estudiando el signo de la función  $W(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle$  cerca del punto de equilibrio, podremos saber si el valor de la función  $V(X)$  aumenta o disminuye a lo largo de las trayectorias.

Las siguientes definiciones hacen referencia al signo que tiene una función entorno a un determinado punto. (Asumiremos que este punto es el origen cuando no se diga lo contrario.)

**Definición.** Diremos que una función  $V(X)$  definida en un entorno de un punto  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  es:

- *Definida positiva* en  $X_0$  cuando  $V(X_0) = 0$ , pero  $V(X) > 0$  para todo  $X \approx X_0$ ,  $X \neq X_0$ .
- *Semidefinida positiva* en  $X_0$  cuando  $V(X_0) = 0$  y  $V(X) \geq 0$  para todo  $X \approx X_0$ ,  $X \neq X_0$ .
- *Definida negativa* en  $X_0$  cuando  $V(X_0) = 0$ , pero  $V(X) < 0$  para todo  $X \approx X_0$ ,  $X \neq X_0$ .
- *Semidefinida negativa* en  $X_0$  cuando  $V(X_0) = 0$  y  $V(X) \leq 0$  para todo  $X \approx X_0$ ,  $X \neq X_0$ .

Para clarificar, en la medida de lo posible, estos conceptos, observamos que:

- Si una función es definida, también es semidefinida.
- Existen funciones que son semidefinidas, pero no son definidas. Ejemplo:  $V(x, y) = x^2$ .
- Existen funciones que no son ni definidas ni semidefinidas. Ejemplo:  $V(x, y) = xy$ .
- La función idénticamente nula tanto es semidefinida positiva como semidefinida negativa.
- Una función definida positiva en un punto “mide” la distancia al punto ya que su valor disminuye/aumenta conforme nos acercamos/alejamos del punto  $X_0$ .

La única diferencia entre funciones definidas y semidefinidas es que las segundas pueden anularse en puntos tan cercanos como queramos al punto  $X_0$ . Por ejemplo,  $V(x, y) = x^2 + y^2$  es definida positiva, pero  $V(x, y) = x^2$  sólo es semidefinida positiva.

La importancia de estos conceptos radica en el siguiente resultado.

**Teorema.** Sea  $X_0$  un punto de equilibrio del sistema  $X' = F(X)$ , sea  $V(X)$  una función definida positiva en el punto  $X_0$  y sea  $W(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle$ . Entonces:

1.  $W(X)$  es definida positiva en  $X_0 \implies X_0$  es I.
2.  $W(X)$  es definida negativa en  $X_0 \implies X_0$  es AE.
3.  $W(X)$  es semidefinida negativa en  $X_0 \implies X_0$  es E (puede ser o no AE).
4.  $W(X) \equiv 0 \implies X_0$  es E, pero no es AE.

*Observación.*  $W(X)$  es semidefinida positiva en  $X_0 \implies X_0$  no es AE, aunque podría ser E.

**Definición.** Diremos que la función  $V(X)$  es una *constante del movimiento* o *integral primera* o *cantidad conservada* del sistema  $X' = F(X)$  cuando  $W(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle \equiv 0$ .

No vamos a probar formalmente este teorema, pues ya hemos presentado las ideas importantes. Tan sólo enfatizamos que cuando  $V(X)$  es una integral primera, el valor de la “distancia”  $V(X)$  se mantiene constante a lo largo de las trayectorias del sistema y, por tanto, las trayectorias ni se alejan ni se acercan al punto de equilibrio  $X_0$ , el cual será E pero no AE. Si además el sistema linealizado era un centro, las trayectorias del SNL también giran alrededor del punto de equilibrio dando lugar a los así llamados *centros no lineales*.

*Ejemplo 3.* Volvemos al sistema 2D del primer ejemplo y escogemos la función

$$V(X) = V(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{2}$$

que es el paradigma de función definida positiva. Entonces

$$W(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2)x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2)x_2' = x_1(x_2(x_1 - 1)) + x_2(x_1(1 - x_1)) \equiv 0.$$

Por tanto, el origen es un punto E, pero no AE. De hecho, es un centro no lineal.

*Problemas relacionados.* (Método de Liapounov), (Ajustando la función de Liapounov) y (Pb3 Enero 2009).

*Observación.* La mayor dificultad práctica del método de Liapounov es hallar alguna función definida positiva que permita aplicar el teorema. No es fácil. Una elección estándar es tomar la energía mecánica (cinética más potencial) como función  $V(X)$  en los problemas mecánicos. Cuando no tenemos en cuenta la fricción, la energía mecánica se conserva y  $W(X) \equiv 0$ . Si tenemos en cuenta la fricción, la energía mecánica se disipa y  $W(X)$  será definida (o semidefinida) negativa.

**El retrato de fases del péndulo sin fricción.** Esta sección es durilla. Tomad un café bien cargado antes de leerla.

Tenemos un péndulo de masa  $m$  y longitud  $l$  bajo un campo gravitatorio de intensidad  $g$ . Usando la segunda ley de Newton comprobamos que la ecuación del movimiento del péndulo sin fricción es la EDO de segundo orden

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo formado por el péndulo con la posición vertical inferior. Introduciendo el parámetro positivo  $c = g/l$  y la velocidad angular  $\omega = \theta'$ , reescribimos la EDO anterior como el sistema no lineal 2D de primer orden

$$\begin{cases} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -c \sin \theta \end{cases} .$$

Queremos dibujar el retrato de fases de este sistema no lineal 2D. Eso incluye calcular todos sus puntos de equilibrio, estudiar la estabilidad de cada uno de ellos y dibujar un croquis aproximado de las trayectorias. El proceso consta de los siguientes pasos:

- *Puntos de equilibrio.* Buscamos los puntos donde la velocidad es igual a cero:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = \omega = 0 \\ \omega' = -c \sin \theta = 0 \end{array} \right\} \implies (\theta, \omega) = (k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Estos puntos de equilibrio corresponden a las posiciones de equilibrio inferior (si  $k$  es par) y superior (si  $k$  es impar) del péndulo.

- *Estabilidad de los puntos de equilibrio por linealización.* La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$  es igual a

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos \theta & 0 \end{pmatrix}_{(\theta, \omega) = (k\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1}c & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $k = 2n + 1$  es impar,  $\det A_k = (-1)^{2n+1}c = -c < 0$  y el sistema linealizado es una silla. Por tanto, hemos probado que la posición de equilibrio superior es inestable. En cambio, si  $k = 2n$  es par,  $\det A_k = (-1)^{2n}c = c > 0$  y traza  $A_k = 0$ , luego el sistema linealizado es un centro. En este segundo caso, la linealización no decide la estabilidad.

- *Estabilidad de la posición de equilibrio inferior por Liapounov.* Si normalizamos el problema tomando el origen de energía potencial en la posición de equilibrio inferior (es decir, en  $\theta = 0$ ), la energía mecánica del péndulo es igual a

$$V(\theta, \omega) = ml^2\omega^2/2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

Una vez tenemos esta normalización, la energía del péndulo nunca es negativa y sólo puede ser igual a cero en la posición de equilibrio inferior. Este argumento físico demuestra que la función  $V(\theta, \omega)$  es definida positiva en los puntos de la forma  $(\theta, \omega) = (2n\pi, 0)$ . Para probar esta afirmación con un razonamiento puramente matemático, bastaría observar que:

- $ml^2\omega^2/2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ ;

- $mgl(1 - \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 2n\pi$ ; y
- $\cos \theta \leq 1$  para todo ángulo  $\theta$ , luego  $V(\omega, \theta) \geq 0$  para todo punto  $(\theta, \omega)$ .

A continuación, calculamos la derivada respecto el tiempo de la energía mecánica:

$$W(\theta, \omega) = \frac{d}{dt}\{V(\theta, \omega)\} = \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \omega)\theta' + \frac{\partial V}{\partial \omega}(\theta, \omega)\omega' = mgl\omega \sin \theta - mgl\omega \sin \theta \equiv 0.$$

Es decir, la energía mecánica se conserva. ¡Sorpresa! Finalmente, aplicamos el cuarto apartado del teorema de la sección anterior y obtenemos que la posición de equilibrio inferior es estable, pero no asintóticamente estable. De hecho, es un centro no lineal.

- *Dibujar las curvas de nivel de la función  $V(\theta, \omega)$ .* Como el valor de función  $V(\theta, \omega)$  permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema, dibujar las curvas de nivel de esta función equivale a dibujar las trayectorias del sistema. Si además marcamos con unas flechas el sentido de la trayectorias, ya tendremos toda la información necesaria en un dibujo denominado *retrato de fases* del sistema.

Aislando la velocidad angular  $\omega$ , las curvas de nivel se pueden escribir así:

$$\omega^2 = E + 2c \cos \theta$$

donde  $c = g/l$  y el parámetro  $E \in [-2c, +\infty)$  está relacionado con el nivel de energía. En las posiciones de equilibrio inferior y superior se cumple que  $E = -2c$  y  $E = 2c$ , respectivamente. En el enlace [http://www.scholarpedia.org/article/Image:Terman\\_pendulum.jpg](http://www.scholarpedia.org/article/Image:Terman_pendulum.jpg) podeis ver el aspecto de las curvas de nivel, con sus correspondientes flechas que determinan el sentido en el que avanzan las trayectorias, aunque el dibujo no encaja exactamente en nuestra discusión, pues allí la posición de equilibrio inferior está situada en el punto  $(x, y) = (\pi, 0)$ .

*Problema relacionado.* (Péndulo con fricción, bis; Pb3 Junio 2009).