

## Sistemas Lineales

En este tema vamos a estudiar los *sistemas de EDOs lineales de primer orden (en forma normal)*. Es decir, sistemas de la forma

$$X' = A(t)X + b(t)$$

siendo  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones continuas definidas en un intervalo abierto  $I$ .

Diremos que este sistema lineal es:

- *homogéneo*, cuando  $b(t) = 0$ ; y
- *a coeficientes constantes*, cuando la matriz  $A(t)$  no depende del tiempo.

Dado un sistema lineal no homogéneo, su *sistema homogéneo asociado* es el que queda al poner  $b(t) = 0$ .

### ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES

En esta sección vamos a estudiar la estructura de las soluciones de un sistema lineal. Veremos que en el caso homogéneo las soluciones forman un subespacio vectorial (sev) cuya dimensión coincide con la dimensión del sistema; es decir, con el número de incógnitas. En el caso no homogéneo las soluciones se pueden expresar como la suma de las soluciones del sistema homogéneo asociado y una solución particular cualquiera del sistema no homogéneo. Conviene remarcar que esta sección se parece mucho a la sección homónima del tema *Ecuaciones Lineales*. Técnicas e ideas son similares.

**PVIs lineales.** Los PVIs asociados a sistemas lineales tienen la forma

$$\begin{cases} X' = A(t)X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

donde el instante inicial  $t_0 \in I$  y la condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  son datos del problema.

**Teorema.** Si las funciones  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas y  $t_0 \in I$ , entonces el PVI tiene exactamente una solución definida en todo el intervalo  $I$ .

Seguimos sin demostrar los teoremas de existencia y unicidad.

*Pregunta.* La derivada de la solución del teorema anterior es continua en  $I$ . ¿Por qué?

Este teorema de existencia y unicidad no es igual al presentado en el tema *Introducción* para sistemas generales (no lineales) de primer orden en forma normal. La diferencia principal es que aquel teorema general tan sólo tiene un carácter local, mientras que este teorema lineal es global: sabemos que la solución del PVI está definida y es de clase  $C^1$  en todo el intervalo  $I$ .

*Ejemplo 1.* Veremos que la solución del PVI lineal homogéneo a coeficientes constantes

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

es la función vectorial

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{0,1} \cos t - x_{0,2} \sin t \\ x_{0,1} \sin t + x_{0,2} \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0.$$

*Ejemplo 2.* La solución del PVI lineal no homogéneo

$$X' = \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1/(t-3) \\ 1/(t+2) \end{pmatrix}, \quad X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una función de clase  $C^1$  en el intervalo  $I = (0, 3)$ .

**Linealidad.** Aplicando las mismas técnicas que en el tema *Ecuaciones Lineales*, se obtiene que:

- Las soluciones del sistema lineal homogéneo  $X' = A(t)X$  forman un sev de dimensión  $n$ , y
- Dada una solución  $X_p(t)$  del sistema no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$  y una solución  $X_h(t)$  del sistema homogéneo asociado, la suma  $X_h(t) + X_p(t)$  también cumple el sistema no homogéneo.

La única afirmación no inmediata es que el subespacio vectorial

$$Z = \{\text{soluciones del sistema lineal homogéneo } X' = A(t)X\}$$

tiene dimensión  $n$ . Fijamos un instante arbitrario  $t_0 \in I$  y consideramos la aplicación lineal

$$Z \ni X(t) \longmapsto X(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta aplicación es inyectiva (unicidad) y exhaustiva (existencia), luego  $\dim Z = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

**Conjunto fundamental de soluciones.** Podemos expresar un sev mediante cualquiera de sus bases. Para describir la solución general  $X_h(t)$  del sistema homogéneo  $X' = A(t)X$  basta conocer  $n$  soluciones linealmente independientes (li)  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ ; entonces

$$X_h(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

**Definición.** Cualquier base  $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$  del sev de soluciones del sistema lineal homogéneo  $X' = A(t)X$  es un *conjunto fundamental (de soluciones)* de dicho sistema.

Así pues, un sistema lineal homogéneo tiene infinitos conjuntos fundamentales.

*Ejemplo 3.* Del examen de Julio de 2008 extraemos el sistema lineal no homogéneo

$$X' = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Si nos dicen que la función  $X_p(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  es una solución particular del sistema no homogéneo y

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema homogéneo asociado, entonces sabemos que todas las combinaciones lineales

$$X_h(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2/2} + 2c_2 e^t \\ c_1 e^{t^2/2} + c_2 e^t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

son soluciones del sistema homogéneo, mientras que todas las sumas

$$X_g(t) = X_h(t) + X_p(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2/2} + 2c_2 e^t - 1 \\ c_1 e^{t^2/2} + c_2 e^t - 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

son soluciones del sistema no homogéneo.

*Pregunta.* ¿Forman las funciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  un conjunto fundamental del sistema homogéneo asociado al ejemplo anterior? En otras palabras, ¿son li?

**Wronskiano, fórmula de Liouville e independencia lineal.** Queremos desarrollar un método para comprobar cuando  $n$  soluciones del sistema lineal homogéneo  $X' = A(t)X$  son li.

**Definición.** Unas funciones  $X_1, \dots, X_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son li cuando de la expresión  $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n = 0$  se sigue que todos los coeficientes son nulos:  $c_1 = \dots = c_n = 0$ .

Es importante observar que:

- Los coeficientes  $c_1, \dots, c_n$  son constantes (no dependen de  $t$ ), y
- La identidad  $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n = 0$  es en el espacio de funciones, luego significa

$$c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

*Ejercicio.* Probar que las funciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  del ejemplo 3 son li, de modo que las funciones  $X_h(t)$  y  $X_g(t)$  son las soluciones generales del sistema homogéneo y no homogéneo, respectivamente. (Truco: Estudiar la ecuación  $c_1X_1(t) + c_2X_2(t) = 0$  en el instante  $t = 0$ .)

El truco de fijar un instante inicial funciona casi siempre. Supongamos que queremos saber si unas funciones vectoriales  $X_1, \dots, X_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son li. Evaluando la identidad  $c_1X_1 + \dots + c_nX_n = 0$  en un instante arbitrario  $t \in I$  obtenemos el sistema lineal tradicional

$$c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t) = 0$$

con  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas:  $c_1, \dots, c_n$ . Recordamos que un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas es compatible y determinado si y sólo si el determinante de la matriz del sistema no se anula, en cuyo caso tiene una única solución: la solución nula.

Las columnas de la matriz del sistema  $n \times n$  anterior son los vectores  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , luego el determinante de la matriz es la función

$$W(t) = W[X_1(t), \dots, X_n(t)] = \det[X_1(t), \dots, X_n(t)].$$

**Definición.** Este determinante es el *Wronskiano* de las funciones vectoriales  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ .

Por tanto,

$$\exists t_0 \in I \text{ t.q. } W(t_0) \neq 0 \implies c_1 = \dots = c_n = 0 \implies X_1(t), \dots, X_n(t) \text{ li.}$$

El recíproco es falso. Existen ejemplos bastante simples de funciones vectoriales li cuyo Wronskiano es idénticamente nulo; por ejemplo<sup>1</sup>,  $X_1(t) = (e^t, t)^T$  y  $X_2(t) = tX_1(t) = (te^t, t^2)^T$ . Sin embargo, nunca tienen lugar en  $Z$  y, por tanto, no nos fijaremos demasiado en ese detalle.

**Proposición.** Sean  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluciones de un sistema lineal homogéneo de primer orden y dimensión  $n$ . Entonces:

- $X_1(t), \dots, X_n(t)$  li  $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$  t.q.  $W(t_0) = 0 \Leftrightarrow W(t) = 0 \quad \forall t \in I$ .
- $X_1(t), \dots, X_n(t)$  li  $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$  t.q.  $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

Algunas equivalencias no son inmediatas, sino que son consecuencias de la *fórmula de Liouville*.

**Teorema** (Fórmula de Liouville). Si  $W(t)$  es el Wronskiano de  $n$  soluciones arbitrarias del sistema lineal homogéneo  $X' = A(t)X$  y  $\alpha(t) = \text{traza}[A(t)]$ , entonces  $W'(t) = \alpha(t)W(t)$ . Por tanto,

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds}.$$

*Ejercicio.* Probar la fórmula de Liouville para el caso  $n = 2$ . El caso general es más complicado.

*Ejercicio.* Deducir la fórmula de Liouville dada en el tema *Ecuaciones Lineales* a partir de ésta.

**Matrices fundamentales y matriz principal.** A continuación, vamos a expresar las soluciones de los sistemas utilizando un lenguaje matricial más compacto. Empezamos con un ejemplo clarificador.

*Ejemplo 4.* La solución general  $X_h(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t)$  del sistema lineal homogéneo del ejemplo 3 se puede escribir en forma matricial. Concretamente,

$$X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

A la luz de estos ejemplos entendemos la importancia de las siguientes definiciones y propiedades.

**Definición.** Sean  $A, \Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Decimos que la matriz  $\Phi(t)$  es:

- Una *solución matricial* del sistema  $X' = A(t)X$  cuando sus columnas son soluciones del sistema; es decir, cuando  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ;
- Una *matriz fundamental* del sistema  $X' = A(t)X$  cuando sus columnas son soluciones li del sistema; es decir, cuando  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$  y  $\det[\Phi(t)] \neq 0$  para todo  $t \in I$ ;

<sup>1</sup>De aquí en adelante, el superíndice  $T$  significa que debemos transponer los vectores fila, para así convertirlos en vectores columna. Esta notación sirve para ahorrar espacio.

- La *matriz principal* del sistema  $X' = A(t)X$  en un instante  $t = t_0$  cuando sus columnas son soluciones del sistema y  $\Phi(t_0) = \text{Id}$ .

*Ejercicio.* Deducir del teorema de existencia y unicidad que la matriz principal existe y es única.

*Ejemplo 5.* Comprobar que

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

es la matriz principal en  $t = 0$  del sistema a coeficientes constantes del ejemplo 1. Sea  $W(t) = \det[\Psi(t)]$ . Resulta que  $W(t) \equiv 1$ . Explicar el porqué usando la fórmula de Liouville.

*Ejemplo 6.* Comprobar que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema del ejemplo 3. Comprobar que su determinante cumple la fórmula de Liouville.

Al igual que en los ejemplos previos, las matrices fundamentales y principales nos permiten escribir las soluciones de un sistema o un PVI en forma compacta, como se ve en la siguiente proposición.

**Proposición.** Sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental y sea  $\Psi(t)$  la matriz principal en el instante  $t = t_0$  del sistema homogéneo  $X' = A(t)X$ . Entonces:

1. La solución general del sistema homogéneo es  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$ , donde  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ .
2. La solución del PVI homogéneo  $X' = A(t)X$ ,  $X(t_0) = X_0$ , es la función  $X(t) = \Psi(t)X_0$ .

Más propiedades que conviene recordar (y probar):

- $\Phi(t)$  matriz fundamental y  $S$  matriz invertible  $\implies \Psi(t) = \Phi(t)S$  es otra matriz fundamental, pero  $\Omega(t) = S\Phi(t)$  probablemente no.
- $\Phi(t)$  matriz fundamental y  $t_0 \in I \implies \Psi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$  es la matriz principal en  $t = t_0$ .

**Fórmula de variación de parámetros.** Vamos a explicar en esta última sección la fórmula de variación de parámetros que nos permite calcular una solución particular de un sistema lineal no homogéneo a partir de una matriz fundamental (o de la matriz principal) de su sistema homogéneo asociado.

**Teorema** (Fórmula de variación de parámetros). Sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental arbitraria y sea  $\Psi(t)$  la matriz principal en el instante  $t = t_0$  del sistema homogéneo  $X' = A(t)X$ . Entonces:

1. Si la función  $U : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una primitiva cualquiera de  $\Phi^{-1}b$  (es decir, si  $U' = \Phi^{-1}b$ ), entonces

$$X_p(t) = \Phi(t)U(t)$$

es una solución particular del sistema no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$ .

2. La solución general del sistema no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$  es

$$X_g(t) = X_h(t) + X_p(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}b(t) dt = \Phi(t) \left( \vec{c} + \int \Phi(t)^{-1}b(t) dt \right).$$

3. La solución del PVI no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$ ,  $X(t_0) = X_0$ , es la función

$$X(t) = \Phi(t) \left( \Phi(t_0)^{-1}X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) ds \right) = \Psi(t) \left( X_0 + \int_{t_0}^t \Psi(s)^{-1}b(s) ds \right).$$

*Observación.* No hace falta escribir constantes de integración al calcular estas integrales indefinidas. La integral de una función vectorial se realiza componente a componente.

*Demostración.* 1. Sabemos que la solución general del sistema homogéneo es  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$ , donde  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de parámetros arbitrarios (libres). Buscamos una solución particular parecida. Concretamente, permitimos que los parámetros dependan del tiempo  $t$ , luego la solución particular es de la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)U(t)$$

para alguna función  $U : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de momento desconocida. Es decir, variamos los parámetros. De ahí viene el nombre del método.

Al imponer que esta función sea una solución del sistema no homogéneo, obtenemos que  $(A\Phi)U + \Phi U' = \Phi'U + \Phi U' = (\Phi U)' = X_p' = AX_p + b = A(\Phi U) + b \Rightarrow \Phi U' = b \Rightarrow U' = \Phi^{-1}b$ .

Sabemos que la matriz  $\Phi$  es invertible, pues es una matriz fundamental.

2. Basta recordar que la solución general  $X_g(t)$  de un sistema lineal no homogéneo es la suma de la solución general  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$  del sistema homogéneo asociado y una solución particular arbitraria  $X_p(t)$  del sistema no homogéneo. Usando el apartado anterior podemos escoger

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}b(t) dt.$$

Repetimos que no se necesitan constantes de integración al calcular esta integral indefinida.

3. Escogemos como primitiva de  $\Phi^{-1}b$  la integral definida de  $t_0$  a  $t$ , luego

$$X_g(t) = \Phi(t) \left( \vec{c} + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) ds \right).$$

Después, determinamos el valor del vector  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  imponiendo la condición inicial:

$$X_0 = X(t_0) = \Phi(t_0) \left( \vec{c} + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(s)^{-1}b(s) ds \right) = \Phi(t_0)(\vec{c} + \vec{0}) \Rightarrow \vec{c} = \Phi(t_0)^{-1}X_0.$$

La fórmula con la matriz principal se obtiene recordando que  $\Psi(t_0) = \text{Id}$ .

□

*Ejercicio.* Resolver el sistema no homogéneo del ejemplo 3 usando la matriz fundamental del ejemplo 6.

### SLS HOMOGÉNEOS A COEFICIENTES CONSTANTES

Ahora resolveremos sistemas lineales homogéneos cuyos coeficientes son constantes. En particular, son sistemas autónomos. Veremos que las herramientas usadas en su resolución son propias del Álgebra Lineal: calcular VAPs y VEPs, diagonalizar matrices, calcular formas (y bases) de Jordan, etc.

**El caso diagonalizable real.** La idea detrás del uso de VAPs y VEPs para resolver sistemas lineales homogéneos a coeficientes constantes consiste en que las funciones vectoriales que se obtienen al multiplicar un VEP por la función exponencial que tiene el correspondiente VAP por exponente son soluciones del sistema.

**Proposición.** Si  $\vec{v}$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de una matriz cuadrada  $A$ , entonces

$$X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

es una solución del sistema  $X' = AX$ .

*Demostración.* Como  $\vec{v}$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $A$ , sabemos que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Por tanto,

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} \lambda \vec{v} = e^{\lambda t} A\vec{v} = Ae^{\lambda t} \vec{v} = AX(t).$$

Aquí hemos usado que la posición de los escalares en una cadena de productos es indiferente. □

*Ejercicio.* Sea  $\vec{v}$  un VEP de VAP  $\lambda$  de una matriz cuadrada  $A$  y sea  $\vec{u}$  un vector tal que  $A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ . Probar que la función

$$Y(t) = e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$$

es otra solución del sistema  $X' = AX$ .

*Ejercicio.* Probar que si  $\vec{v}$  es un VEP constante de VAP  $\lambda(t)$  de una matriz cuadrada  $A(t)$ , entonces

$$X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} \cdot \vec{v}$$

es una solución del sistema homogéneo no autónomo  $X' = A(t)X$ .

Cuando la matriz del sistema es diagonalizable —por ejemplo, si todos sus VAPs son simples—, siempre es posible generar, a partir de una base de VEPs, un conjunto fundamental formado por soluciones de la forma anterior.

**Teorema.** *Supongamos que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base de VEPs de VAPs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de la matriz  $A$ . Entonces, la solución general del sistema  $X' = AX$  es*

$$X_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Como las  $n$  funciones vectoriales  $X_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$  son soluciones del sistema, basta comprobar que son li. Por ejemplo, viendo que su Wronskiano no se anula en el instante  $t = 0$ . Pero

$$W(0) = \det[X_1(0), \dots, X_n(0)] = \det[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] \neq 0$$

pues los VEPs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  forman una base. □

*Ejercicio.* Comprobar que bajo las hipótesis y notaciones del teorema anterior, el Wronskiano de las funciones  $X_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$  cumple la fórmula de Liouville  $W(t) = W(0)e^{\alpha t}$ , donde  $\alpha = \text{traza } A$ .

*Ejemplo 7.* Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2),$$

luego los VAPs son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$ , ambos simples. Por tanto, la matriz  $A$  diagonaliza y resulta fácil calcular una base de VEPs. Una posible base es  $\vec{v}_1 = (3, -2)^T$  y  $\vec{v}_2 = (1, -1)^T$ . Así pues,

$$X_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \\ -2c_1 e^{-t} - c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general del sistema. Además,

$$\Phi(t) = \left( \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \mid \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \right) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental, probablemente la más simple de obtener.

*Ejercicio.* Sea  $X(t)$  una solución del sistema anterior. ¿Qué se puede decir sobre  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$ ?

**El caso diagonalizable complejo.** Cuando la matriz diagonaliza en los complejos; es decir, cuando diagonaliza pero tiene algunos VAPs complejos conjugados, aplicaremos el mismo truco que en el tema *Ecuaciones Lineales*. El truco consiste en substituir las parejas de soluciones complejas conjugadas obtenidas al aplicar directamente el método anterior por aquellas combinaciones lineales que dan lugar a resultados puramente reales.

El truco funciona siempre, pero lo explicamos siguiendo un ejemplo concreto para clarificar ideas.

*Ejemplo 8.* Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar (¡comprobadlo!) que el polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 - 25\lambda + 25 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 25).$$

Los VAPs son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_{2,3} = \pm 5i$ , todos simples. Por tanto, la matriz diagonaliza en los complejos.

Pasamos a calcular una base de VEPs. Empezamos por el caso más fácil, el VAP real  $\lambda_1 = 1$ .

$$\text{Nuc}(A - \text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -12y - 14z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 25z/6 \\ -7z/6 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right].$$

Por tanto, podemos escoger  $\vec{v}_1 = (25, -7, 6)^T$  como primer VEP de la base.

El caso de los VAPs complejos conjugados es más complicado, aunque aprovecharemos que si dos VAPs son conjugados, sus VEPs también lo son. Es decir, basta realizar la mitad de los cálculos. Por tanto, para calcular la parte de la base asociada a los VAPs  $\lambda_{2,3} = \pm 5i$ , basta calcular el núcleo

$$\text{Nuc}(A - 5i\text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (1 - 5i)x - 12y - 14z = 0 \\ x + (2 - 5i)y - 3z = 0 \\ x + y - (2 - 5i)z = 0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{pmatrix} 1 + 5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Escogemos a  $\vec{v}_{2,3} = (1 \pm 5i, 1, 1)^T$  como segundo y tercer vectores de la base de VEPs. Finalmente, usando la fórmula de Euler

$$e^{\pm 5ti} = \cos 5t \pm i \sin 5t = c \pm si, \quad \begin{cases} c = \cos 5t \\ s = \sin 5t \end{cases}$$

obtenemos que

$$X_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 (c + si) \begin{pmatrix} 1 + 5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 (c - si) \begin{pmatrix} 1 - 5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_{\mathbb{C}}(t) \vec{c}$$

es la solución general (compleja) del sistema. Hemos introducido la notación con las letras  $c$  y  $s$  para escribir menos. Aquí,  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$  es el vector de constantes, mientras que

$$\Phi_{\mathbb{C}}(t) = \begin{pmatrix} 25e^t & (c - 5s) + (s + 5c)i & (c - 5s) - (s + 5c)i \\ -7e^t & c + si & c - si \\ 6e^t & c + si & c - si \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} c = \cos 5t \\ s = \sin 5t \end{cases}$$

es una matriz fundamental (compleja) del sistema. Es importante resaltar que la tercera columna de esta matriz es la conjugada de la segunda columna. Y esto no es una casualidad.

Sin embargo, no estamos satisfechos con la expresión anterior. Queremos librarnos de todas las partes imaginarias, hasta que quede una expresión puramente real. Para eso, recordamos que las columnas de cualquier matriz fundamental son soluciones del sistema y, además, cualquier combinación de soluciones también es solución. Por tanto, la idea clave consiste en substituir las columnas complejas conjugadas de la matriz fundamental compleja (en este caso, la segunda y tercera columnas) por sus partes real e imaginaria, respectivamente. Así obtenemos una matriz fundamental real:

$$\Phi_{\mathbb{R}}(t) = \begin{pmatrix} 25e^t & \cos 5t - 5 \sin 5t & \sin 5t + 5 \cos 5t \\ -7e^t & \cos 5t & \sin 5t \\ 6e^t & \cos 5t & \sin 5t \end{pmatrix}.$$

La solución general real es  $X_h(t) = \Phi_{\mathbb{R}}(t) \vec{c}$ , siendo  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3$  un vector de constantes libres.

Ahora ya podemos resolver cualquier sistema lineal diagonalizable, tenga o no VAPs complejos. Sin embargo, existe un método alternativo para los sistemas 2D con VAPs complejos conjugados, basado en la forma de Jordan real, que es más rápido desde un punto de vista computacional. Lo veremos más adelante.

**El caso general: Exponencial de una matriz y forma de Jordan.** A estas alturas de la discusión la mente inquieta del lector seguramente se estará preguntando qué se puede hacer cuando la matriz del sistema no diagonaliza. Probablemente recordará que en el curso de *Álgebra Lineal* le hablaron de la forma (reducida) de Jordan, que era una generalización útil de la forma diagonal para matrices no diagonalizables. Damos un rápido repaso a las notaciones básicas.

Dado un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  y un natural  $r \in \mathbb{N}$ ,  $J_r(\lambda)$  denotará la matriz  $r \times r$  cuyos elementos diagonales son igual al escalar  $\lambda$ , cuyos elementos subdiagonales son igual a uno y el resto son nulos. Por ejemplo,

$$J_1(\lambda) = (\lambda) \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Las matrices de la forma  $J_r(\lambda)$  son *bloques de Jordan*. Las matrices diagonales por bloques, cuyos bloques diagonales son bloques de Jordan, son *matrices de Jordan*. Fin del repaso.

Pues bien, como es natural, ahí está la clave. Vamos a explicar las ideas básicas, pero restringiremos los cálculos concretos a los casos 2D y 3D. El objetivo es desarrollar un método que permita resolver cualquier sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes.

Sabemos que, dado cualquier número real  $a$ , la solución general de la EDO lineal homogénea de primer orden  $x' = ax$  es  $x_h(t) = ce^{at}$ , siendo  $c \in \mathbb{R}$  una constante libre. Por analogía, podemos pensar que dada cualquier matriz cuadrada  $A$ , la solución general del sistema homogéneo de primer orden  $X' = AX$  será  $X_h(t) = e^{tA}\vec{c}$ , con  $\vec{c}$  un vector de constantes libres. Sólo nos falta saber que  $e^{tA}$  es la exponencial de una matriz.

**Definición.** La exponencial de una matriz cuadrada  $A$  es la matriz que se obtiene mediante la serie

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k \geq 0} A^k/k! = \text{Id} + A + A^2/2 + A^3/6 + \dots.$$

La serie anterior es (absolutamente) convergente, pero en este curso siempre vamos a saltarnos esas sutilezas y trabajaremos a un nivel puramente formal.

*Ejercicio.* Ver que si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  es diagonal, entonces  $e^{tD} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ . En particular, esto prueba que la exponencial de una matriz no se obtiene calculando la exponencial elemento a elemento de la matriz inicial.

**Proposición.** La exponencial de una matriz tiene las siguientes propiedades:

1.  $e^0 = \text{Id}$ .
2.  $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ .
3. La matriz  $e^A$  siempre es invertible y su inversa es la matriz  $e^{-A}$ .
4. Si  $S$  es invertible (por ejemplo, una matriz de cambio de base), entonces  $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$ .
5.  $\Psi(t) = e^{(t-t_0)A}$  es la matriz principal en el instante  $t = t_0$  del sistema  $X' = AX$ .

*Demostración.* Sólo probamos la última propiedad, pues es la que más nos interesa. Primero vemos que la matriz  $\Psi(t)$  es una solución del sistema:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= (\text{Id} + (t-t_0)A + (t-t_0)^2 A^2/2 + (t-t_0)^3 A^3/6 + \dots)' \\ &= A + (t-t_0)A^2 + (t-t_0)^2 A^3/2 + (t-t_0)^3 A^4/6 + \dots \\ &= A(\text{Id} + (t-t_0)A + (t-t_0)^2 A^2/2 + (t-t_0)^3 A^3/6 + \dots) \\ &= Ae^{(t-t_0)A} = A\Psi(t). \end{aligned}$$

Para acabar, notamos que  $\Psi(t_0) = e^{(t_0-t_0)A} = e^{0A} = e^0 = \text{Id}$ . □

*Ejercicio.* Probar las otras propiedades, salvo la segunda que no es nada trivial.

A la vista de la última propiedad, queda claro que para resolver cualquier sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes basta saber calcular la exponencial de la matriz del sistema. Y para eso tenemos el siguiente resultado, de nuevo sin pruebas.

**Proposición.** Sea  $J$  la forma reducida de Jordan de una matriz cuadrada  $A$  y sea  $S$  una matriz de cambio de base tal que  $J = S^{-1}AS$ . Entonces:

- $\Psi(t) = e^{(t-t_0)A} = Se^{(t-t_0)J}S^{-1}$  es la matriz principal en  $t = t_0$  del sistema  $X' = AX$ .
- $\Phi(t) = e^{tA}S = Se^{tJ}$  es una matriz fundamental del sistema  $X' = AX$ .

- Si  $J_1, \dots, J_l$  son los bloques de Jordan:  $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_l)$ , entonces

$$e^{tJ} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_l}).$$

- Dado un bloque de Jordan  $J_r(\lambda)$  de orden  $r$  y VAP  $\lambda$ , se cumple que

$$e^{tJ_r(\lambda)} = \exp(tJ_r(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

*Ejercicio.* Probar la fórmula para la exponencial de los bloques de Jordan 2D; es decir, para  $r = 2$ .

Para calcular la solución general de un sistema, basta tener una matriz fundamental arbitraria. Por tanto, como inteligentes vagos que somos, en tal caso nos limitaremos a calcular la matriz fundamental dada por la fórmula  $\Phi(t) = Se^{tJ}$ , evitando a toda costa el cálculo de la inversa de  $S$ .

*Ejemplo 9.* Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

luego tiene un único VAP doble:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . Además, la matriz no diagonaliza, pues

$$\text{mg}(-1) = \dim[\text{Nuc}(A + \text{Id})] = 1 < 2 = \text{ma}(-1).$$

La forma de Jordan  $J$  y una matriz de cambio de base (de base natural a base de Jordan)  $S$  son

$$J = J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos calcular una matriz fundamental con la fórmula

$$\Phi(t) = Se^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$X_h(t) = \Phi(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_1 t \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Problema de la lista.* (SLs homogéneos a coeficientes constantes).

**La forma de Jordan real para sistemas 2D.** Esta sección se reduce al siguiente problema.

*Problema de la lista.* (Forma de Jordan real)

*Observación.* Ahora ya podéis resolver todos los problemas de la lista correspondientes a este tema que sean de tipo algebraico. Los problemas de tipo dinámico (el primero de ellos habla del criterio traza-determinante) son más divertidos y no entran en el examen parcial.

*Problemas de la lista.* (Reducción a coeficientes constantes), (Variación de parámetros), (Pb2 Septiembre 1990 & Pb1 Julio 2008), (Pb2 Junio 2009) y (Pb1 Enero 2002).

## ESTABILIDAD DE SLS A COEFICIENTES CONSTANTES

Hasta ahora, nuestro objetivo ha sido calcular explícitamente las soluciones de EDOs y sistemas. Es decir, hemos realizado estudios cuantitativos, exactos, con fórmulas muy precisas. Sin embargo, y mal que nos pese, las EDOs y sistemas que podemos resolver explícitamente son una minoría. Por eso, necesitamos desarrollar una teoría cualitativa que nos permita describir el comportamiento dinámico de las soluciones de una EDO o sistema sin tener que calcularlas.

Empezaremos por los SLS a coeficientes constantes que son los sistemas más simples posibles. Estudiaremos los sistemas no lineales (SNLs) autónomos en el siguiente tema.

La primera observación es que la velocidad del sistema  $X' = AX$  en el origen es igual a cero, pues

$$X = \vec{0} \implies X' = AX = A\vec{0} = \vec{0}.$$

En particular, la función constante  $X(t) = \vec{0}$  siempre es una solución del sistema homogéneo  $X' = AX$ . Esto es un caso particular del siguiente concepto.

**Definición.** Diremos que un punto  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  es un *punto de equilibrio, crítico, estacionario* o *fijo* del sistema  $X' = AX$  cuando la velocidad del sistema en ese punto sea cero. Es decir, cuando  $X_0 \in \text{Nuc } A$ .

Si  $\det A \neq 0$ , el origen es el único punto fijo del sistema. De lo contrario, el sistema tiene infinitos puntos fijos, pero todos son iguales —ver el siguiente ejercicio— y basta estudiar el origen.

*Ejercicio.* Probar que si  $X_0$  es un punto fijo del sistema lineal  $X' = AX$ , entonces el cambio de variable dependiente  $Y = X - X_0$  no modifica el sistema; es decir, el sistema transformado es  $Y' = AY$ .

Dado un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes, la primera cuestión cualitativa que estudiaremos consiste en determinar si sus trayectorias se escapan a infinito o tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Estas dos posibilidades no son complementarias. Por ejemplo, en algunos sistemas las trayectorias giran sin escaparse ni acercarse.

**Definición.** Diremos que el sistema  $X' = AX$  es:

- *Inestable (I)* cuando alguna de sus soluciones escapa a infinito;
- *Estable (E)* cuando no es inestable (es decir, si ninguna de sus soluciones escapa a infinito);
- *Asintóticamente estable (AE)* cuando todas sus soluciones tienden al origen.

*Ejemplo 10.* La función  $x_h(t) = x_0 e^{\lambda t}$  es la solución general de la EDO lineal homogénea  $x' = \lambda x$ . Por tanto, esta EDO es I ssi  $\lambda > 0$ , E ssi  $\lambda \leq 0$  y AE ssi  $\lambda < 0$ . En particular, es E pero no AE ssi  $\lambda = 0$ .

**Definición.** Sea  $\vec{v}$  un VEP de VAP  $\lambda \in \mathbb{R}$  de la matriz  $A$ . Sea  $r = [\vec{v}]$  la recta que pasa por el origen con dirección  $\vec{v}$ . Entonces, diremos que  $r$  es una

- *Recta de salida (o escape)* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\lambda > 0$ .
- *Recta de entrada* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\lambda < 0$ .
- *Recta de puntos fijos* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\lambda = 0$ .

La interpretación de estas definiciones es la siguiente. Si  $X_0$  es un punto situado sobre la recta  $r$ , entonces la solución del PVI

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0$$

es la función  $X(t) = e^{\lambda t} X_0$ , pues  $AX_0 = \lambda X_0$ . Por tanto, cualquier trayectoria del sistema que empieza en un punto de la recta  $r$  se mantiene dentro de la recta y, además, para decidir si escapa hacia infinito, tiende al origen o se queda fija basta fijarse en el signo del VAP  $\lambda$ .

*Pregunta.* En una recta de entrada, ¿cuánto tiempo tarda la trayectoria en llegar al origen?

El caso de VAPs complejos conjugados admite una interpretación similar.

**Definición.** Sean  $\vec{v}_{\pm} = \vec{u} \pm \vec{w}i$  VEPs complejos conjugados de VAPs  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$  de la matriz  $A$ . Sea  $\pi = [\vec{u}, \vec{w}]$  el plano que pasa por el origen con direcciones  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ . Entonces, diremos que  $\pi$  es un

- *Plano de salida (o escape)* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\alpha > 0$ .
- *Plano de entrada* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\alpha < 0$ .

- *Plano de giros cerrados* del sistema  $X' = AX$  cuando  $\alpha = 0$ .

*Ejercicio.* Probar que las trayectorias que empiezan en un punto del plano  $\pi$  se mantienen dentro del plano. Veremos en el caso de sistemas 2D que esas trayectorias son espirales que escapan a infinito, espirales que tienden al origen o curvas cerradas en función del signo de  $\alpha = \operatorname{Re} \lambda_{\pm}$ .

Así pues, los VAPs reales positivos y los VAPs complejos de parte real positiva dan lugar a sistemas inestables, pero no son los únicos VAPs “peligrosos”. Damos el siguiente teorema sin probarlo.

**Teorema.** *El sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes  $X' = AX$  es:*

- *Asintóticamente estable si y sólo si todos los VAPs de  $A$  tienen parte real negativa.*
- *Inestable si y sólo si algún VAP de  $A$  tiene parte real positiva o algún VAP no semi-simple de  $A$  tiene parte real nula.*

Un VAP es *semi-simple* cuando su bloque de Jordan es diagonal (no tiene unos en la subdiagonal). Es decir, cuando coinciden sus multiplicidades algebraica y geométrica.

*Ejemplo 11.* Estudiar la estabilidad del sistema  $X' = AX$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}$ .

Las raíces del polinomio característico  $Q_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$  son  $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{7}i)/2$ , luego AE.

*Ejercicio.* Probar que si  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  son dos soluciones arbitrarias del sistema lineal no homogéneo  $X' = AX + b(t)$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (X_1(t) - X_2(t)) = \mathbf{0}$ . (Indicación: Repasar la prueba del lema sobre oscilaciones forzadas amortiguadas.)

*Ejercicio.* Probar que si la traza de  $A$  es positiva, entonces el sistema  $X' = AX$  es inestable.

*Ejemplo 12.* Estudiar la estabilidad de la EDO  $x''' + 3x'' + 4x' + 2x = 0$ .

Reescribimos la EDO como un sistema lineal 3D homogéneo a coeficientes constantes  $X' = AX$ . Entonces el polinomio característico de la EDO y el polinomio característico de la matriz  $A$  coinciden:  $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = Q_A(\lambda)$ . Las raíces de estos polinomios son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$ . Por tanto, la EDO (y el sistema lineal asociado  $X' = AX$ ) es AE.

**Proposición.** *Dada una matriz real  $A$  de orden dos, notamos  $T = \operatorname{traza} A$  y  $D = \det A$ . Entonces el sistema  $X' = AX$  es:*

- *Inestable si  $D < 0$  o  $T > 0$ .*
- *Asintóticamente estable si  $D > 0$  y  $T < 0$ .*
- *Estable pero no asintóticamente estable si 1)  $D = 0$  y  $T < 0$ ; o 2)  $T = 0$  y  $D > 0$ .*

*El caso  $T = D = 0$  puede ser estable o inestable.*

*Demostración.* Sean  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  las raíces del polinomio característico  $Q_A(t) = t^2 - Tt + D$ . Entonces

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

donde  $\Delta := T^2 - 4D$  es el discriminante. Además,  $T = \lambda_+ + \lambda_-$  y  $D = \lambda_+ \lambda_-$ . Distinguiamos seis casos:

- $T > 0 \implies \operatorname{Re} \lambda_+ + \operatorname{Re} \lambda_- = \operatorname{Re}(\lambda_+ + \lambda_-) = \operatorname{Re} T = T > 0 \implies \exists \sigma$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda_{\sigma} > 0 \implies$  I.
- $D = \lambda_+ \lambda_- < 0 \implies \Delta = T^2 - 4D \geq 0 \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R} \implies \operatorname{signo} \lambda_+ \neq \operatorname{signo} \lambda_- \implies$  I.
- $D > 0, T < 0$  y  $\lambda_{\pm} \notin \mathbb{R} \implies \Delta < 0 \implies \operatorname{Re} \lambda_{\pm} = T/2 < 0 \implies$  AE.
- Si  $D > 0, T < 0$  y  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos dos VAPs reales cuyo producto es positivo (luego los dos VAPs tienen el mismo signo) y cuya suma es negativa (luego ambos VAPs son negativos). Por tanto, el sistema es AE.
- $T = 0$  y  $D > 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-D}$  son imaginarios puros  $\implies \operatorname{Re} \lambda_{\pm} = 0 \implies$  E pero no AE.
- $D = 0$  y  $T < 0 \implies \lambda_- = T < 0$  y  $\lambda_+ = 0 \implies$  E pero no AE.

□

*Ejercicio.* Representar los resultados gráficamente en el plano de coordenadas  $(T, D)$ .

*Ejercicio.* Estudiar la estabilidad del sistema  $X' = AX$ , donde  $A = \begin{pmatrix} -\mu & 2\mu - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Calcular el valor de bifurcación (paso de estabilidad a inestabilidad) del parámetro  $\mu$ . (Respuesta:  $\mu = 1/2$ .)

#### CLASIFICACIÓN DE SLS HOMOGÉNEOS A COEFICIENTES CONSTANTES

Cuando ya sabemos si el sistema  $X' = AX$  es inestable, estable o asintóticamente estable, podemos descubrir cuántas direcciones de salida o entrada tiene, cuáles son las direcciones más rápidas o más lentas, si sus trayectorias giran y en qué sentido giran, etc.

**Clasificación y croquis de sistemas 2D.** Empezamos por los sistemas más simples posibles: los sistemas 2D, cuando  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ . Si el determinante de  $A$  es igual a cero, diremos que el sistema es *degenerado*. De lo contrario, los dos VAPS de la matriz son diferentes de cero y clasificaremos el sistema como:

- Una *silla*, si los VAPs son reales y de signos diferentes,
- Un *nodo*, si los VAPs son reales pero del mismo signo, en cuyo caso diremos que el nodo es:
  - *Asintóticamente estable* o *inestable* cuando ambos VAPs sean negativos o positivos, respectivamente; y
  - *Propio* o *impropio* si la matriz diagonaliza o no diagonaliza, respectivamente;
- Un *centro*, si los VAPs son imaginarios puros; y
- Un *foco*, si los VAPs son complejos conjugados de parte real no nula, en cuyo caso diremos que el foco es *asintóticamente estable* o *inestable* cuando la parte real de los VAPs sea negativa o positiva, respectivamente.

*Observación.* Tradicionalmente, los nodos con VAPs reales negativos y los focos con VAPs complejos conjugados de parte real negativa se etiquetan como estables “a secas”, en vez de asintóticamente estables. Sin embargo, debido a la confusión que esta convención genera entre los estudiantes, vamos a romperla. Pero esto debe ser tenido en cuenta cuando se consulte bibliografía externa o cuando se miren las soluciones de pasados exámenes.

Una vez tenemos esta clasificación, queremos saber que aspecto tienen las trayectorias de cada uno de estos sistemas. De hecho, el objetivo final consiste en desarrollar un método que nos permita dibujar un *croquis* lo más aproximado posible de las trayectorias de un sistema 2D arbitrario. En estos apuntes, por pereza, no vamos a incluir ningún dibujo. El lector interesado los puede realizar por sí mismo y compararlos después con los bonitos dibujos de la referencia *Notes on Differential Equations* de Bob Terrell que se puede obtener del enlace <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/dn.pdf>. O mejor aún, puede realizar el siguiente ejercicio.

*Ejercicio.* Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender los dos applets de JAVA sobre *Linear Phase Portraits*.

Los siguientes comentarios proporcionan los elementos clave para realizar un croquis:

- Si los VAPs son reales, empezamos calculando las rectas de entrada, salida y/o puntos fijos, que conforman el esqueleto del croquis. Después, dibujamos las otras trayectorias recordando que no pueden cruzarse entre ellas debido al teorema de existencia y unicidad. Por ejemplo, una silla tiene una recta de salida y otra de entrada; el resto de sus trayectorias tienen el aspecto de hipérbolas. En cambio, un nodo propio asintóticamente estable/inestable con dos VAPs simples tiene dos rectas de entrada/salida (lenta y rápida) y el resto de sus trayectorias tienen el aspecto de parábolas tangentes a la recta lenta. Finalmente, un nodo impropio asintóticamente estable/inestable tiene una única recta de entrada/salida y sus otras trayectorias son tangentes a esa recta.
- Si los VAPs son complejos conjugados:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , todas las trayectorias giran alrededor del origen. El sentido de giro se determina calculando la velocidad en algún punto del plano. El signo de  $\alpha$  determina si las trayectorias son curvas cerradas (centros) o espiralan hacia adentro

o fuera (focos asintóticamente estables o inestables). Vamos a verlo. Mediante un cambio de base podemos asumir que la matriz está en su forma de Jordan real. Es decir,

$$A = J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0$ , es igual a

$$X(t) = e^{tA} X_0 = e^{tJ_{\mathbb{R}}} X_0 = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} X_0.$$

Por tanto, el punto  $X(t)$  se obtiene a partir de la condición inicial  $X_0$  mediante una rotación de ángulo  $\beta t$  y una homotecia de razón  $e^{\alpha t}$ . Así pues, la velocidad de giro depende de la parte imaginaria  $\beta$  y la contracción/dilatación depende de la parte real  $\alpha$ . Si  $\alpha = 0$ , la condición inicial sólo gira y la trayectoria forma una circunferencia (una elipse en las variables originales).

*Ejercicio.* Dibujar los croquis de las formas de Jordan correspondientes a los sistemas degenerados

$$J_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Problemas de la lista.* (Croquis de sistemas lineales), (Test Enero 1998), (Test Enero 1999), (Test Enero 2002), (Test Enero 2006) y (Dibujando las elipses en un centro lineal).

**El criterio traza-determinante para sistemas 2D.** Esta sección se reduce al siguiente resultado.

**Proposición.** Dada una matriz real  $A$  de orden dos, notamos  $T = \text{traza } A$ ,  $D = \det A$  y  $\Delta = T^2 - 4D$ . Entonces el sistema  $X' = AX$  es:

- Una silla si y sólo si  $D < 0$ .
- Un centro si y sólo si  $T = 0$  y  $D > 0$ .
- Un foco si y sólo si  $T \neq 0$  y  $\Delta < 0$ .
- Un nodo si y sólo si  $D > 0$  y  $\Delta \geq 0$ .

*Demostración.* Sean  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  las raíces del polinomio característico  $Q_A(t) = t^2 - Tt + D$ . Entonces

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Además,  $T = \lambda_+ + \lambda_-$  y  $D = \lambda_+ \lambda_-$ . Ahora distinguimos cuatro casos:

- $D = \lambda_+ \lambda_- < 0 \implies \Delta = T^2 - 4D \geq 0 \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R} \implies \text{signo } \lambda_+ \neq \text{signo } \lambda_- \implies \text{Silla.}$
- $T = 0$  y  $D > 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-D}$  son imaginarios puros  $\implies \text{Re } \lambda_{\pm} = 0 \implies \text{Centro.}$
- $T \neq 0$  y  $\Delta < 0 \implies \lambda_{\pm} = \frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$  son complejos conjugados y  $\text{Re } \lambda_{\pm} = T/2 \neq 0 \implies \text{Foco.}$
- $D = \lambda_+ \lambda_- > 0$  y  $\Delta \geq 0 \implies \text{VAPs reales del mismo signo} \implies \text{Nodo.}$

□

Este criterio simplifica la resolución de los siguientes problemas.

*Problemas de la lista.* (Diagrama de bifurcaciones), (Pb2 Enero 1998 & Pb2 Enero 2002) y (Pb2 Enero 2009).

**Algunos comentarios sobre sistemas 3D.** Suponemos, por simplicidad, que  $A$  es una matriz diagonalizable  $3 \times 3$ . Entonces para dibujar el croquis del sistema  $X' = AX$  basta recordar que:

- Los VAPs reales dan lugar rectas de entrada, de salida o de puntos fijos; y
- Los VAPs complejos conjugados dan lugar a planos de entrada, de salida o de giros cerrados.

*Ejemplo 13.* Sea  $A$  una matriz con VAPs  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

y sea  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  una base de VEPs. Entonces existen tres rectas importantes:  $r_1 = [\vec{v}_1]$  (salida),  $r_2 = [\vec{v}_2]$  (entrada lenta) y  $r_3 = [\vec{v}_3]$  (entrada rápida). En el plano generado por los VEPs de VAPs negativos el sistema tiene el aspecto de un nodo propio asintóticamente estable. En los planos generados

por  $\vec{v}_1$  y un VEP de VAP negativo, el sistema es una silla. El resto del croquis 3D se deduce de ese “esqueleto”.

*Ejercicio.* Dibujar el croquis en los casos: 1)  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 = 0$ , y 2)  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

*Ejemplo 14.* Sea  $A$  una matriz con VAPs  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$  tales que

$$\alpha < 0 < \lambda_1.$$

Sea  $\vec{v}_1$  un VEP de VAP  $\lambda_1$  y sean  $\vec{v}_{2,3} = \vec{u} \pm \vec{w}i$  unos VEPs de VAP  $\lambda_{2,3}$ . La recta  $r_1 = [\vec{v}_1]$  es de salida y el plano  $\pi = [\vec{u}, \vec{w}]$  es de entrada. En el plano  $\pi$  el sistema es un foco asintóticamente estable. Las trayectorias 3D parecen espirales que se escapan al infinito en la dirección  $\vec{v}_1$ , pero cuyas amplitudes se hacen cada vez más pequeñas.

*Ejercicio.* Dibujar el croquis en los casos: 1)  $\alpha = 0 < \lambda_1$ , 2)  $0 < \alpha < \lambda_1$ , y 3)  $0 < \lambda_1 < \alpha$ .

*Problema de la lista.* (Pb2 Junio 2006).