Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 29 de octubre de 2008 Depositado en www.ma1.upc.edu/∼edis/ Tiempo: 75 minutos

Apellidos, Nombre:

2.5 puntos. Calcular la solución general de la EDO $x''' - x = \cos t$. ¿Cuántas soluciones periódicas tiene?

Solución:

- *Paso 1: Resolver la EDO homogénea.*
  La tabla del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 - 1$ es

Raíces	Mult.	Funciones
1	1	e^t
$(-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i})/2$	1	$\mathrm{e}^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2), \mathrm{e}^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$

  Por tanto, $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t/2}\big(c_2\cos\sqrt{3}t/2 + c_3\sin\sqrt{3}t/2\big)$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.
- *Paso 2: Encontrar un polinomio $P_1(\lambda)$ que anule al término no homogéneo $b(t) = \cos t$.*
  El polinomio $P_1(\lambda) = \lambda^2 + 1$ anula a cualquier múltiplo de la función $\cos t$.
- *Paso 3: Construir un candidato $x_{\mathrm{p}}(t)$ a solución particular usando el polinomio $P(\lambda)P_1(\lambda)$.*
  La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda^2 + 1)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
1	1	e^t
$(-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i})/2$	1	$\mathrm{e}^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2), \mathrm{e}^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$
$\pm\mathrm{i}$	1	$\underline{\cos t, \sin t}$

  Nuestro candidato a solución particular es la combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la primera: $x_{\mathrm{p}}(t) = c_4\cos t + c_5\sin t$, siendo c_4 y c_5 coeficientes a determinar.
- *Paso 4: Determinar los coeficientes indeterminados imponiendo que $x_{\mathrm{p}}(t)$ cumpla la EDO.*

$$\cos t = x_{\mathrm{p}}''' - x_{\mathrm{p}} = (c_4\sin t - c_5\cos t) - (c_4\cos t + c_5\sin t) = -(c_4 + c_5)\cos t + (c_4 - c_5)\sin t.$$

La solución del sistema dado por las ecuaciones $c_4 + c_5 = -1$ y $c_4 - c_5 = 0$ es igual a $c_4 = -1/2$ y $c_5 = -1/2$.

Finalmente, $x_{\mathrm{g}}(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = c_1\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t/2}\big(c_2\cos\sqrt{3}t/2 + c_3\sin\sqrt{3}t/2\big) - (\cos t + \sin t)/2$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres. Tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, queda $x(t) = x_{\mathrm{p}}(t) = -(\cos t + \sin t)/2$ que es la única solución periódica de la EDO.

---

2 puntos. Calcular la ecuación $f(\mu) = 0$ que satisfacen los VAPs de la forma $\lambda = \mu^2 > 0$ del PVF

$$x'' = \lambda x, \qquad 2x(0) + x'(0) = 0, \qquad x(1) = 0.$$

Después, usando que $\cosh 1 < 2\sinh 1$ y $\sinh 2 < \cosh 2$, probar que existe algún VAP en el intervalo $(1, 4)$.

(Indicación: No intenteis calcular el VAP resolviendo la ecuación $f(\mu) = 0$.)

Solución:

Si $\lambda = \mu^2 > 0$, sabemos que la solución general de la EDO es

$$x_{\mathrm{h}}(t) = c_1\cosh\mu t + c_2\sinh\mu t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora imponemos las condiciones de frontera

$$\left.\begin{array}{rcccl} 2c_1 + \mu c_2 & = & 2x(0) + x'(0) & = & 0 \\ (\cosh\mu)c_1 + (\sinh\mu)c_2 & = & x(1) & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & \mu \\ \cosh\mu & \sinh\mu \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema homogéneo $A_\lambda\vec{c} = \vec{0}$ tenga alguna solución no trivial necesitamos que

$$\det A_\lambda = 2\sinh\mu - \mu\cosh\mu = 0.$$

Es decir, $\lambda = \mu^2 > 0$ es VAP si y sólo si se cumple la ecuación $f(\mu) = 2\sinh\mu - \mu\cosh\mu = 0$.

Finalmente, $f(1) = 2\sinh 1 - 1\cosh 1 > 0$ y $f(2) = 2\sinh 2 - 2\cosh 2 < 0$. Así, aplicando Bolzano, $\exists\mu_* \in (1, 2)$ tal que $f(\mu_*) = 0$. Esto implica que existe algún VAP $\lambda_* = \mu_*^2 \in (1, 4)$.

1.5 puntos. Calcular el Wronskiano $W(t)$ de un conjunto fundamental de la EDO homogénea

$$tx''' - x'' + \sqrt{t}x' + t^2 x = 0, \qquad t > 0,$$

sabiendo que $W(2) = 3$.

Solución: La EDO normalizada es $x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ con

$$a_2(t) = -1/t, \qquad a_1(t) = 1/\sqrt{t}, \qquad a_0(t) = t.$$

Por tanto, si aplicamos la fórmula de Liouville en $t_0 = 2$ vemos que

$$W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a_2(s)\mathrm{d}s} = 3\mathrm{e}^{\int_2^t s^{-1}\mathrm{d}s} = 3\mathrm{e}^{\ln s|_{s=2}^{s=t}} = 3\mathrm{e}^{\ln t - \ln 2} = 3t/2.$$

---

2 puntos. Calcular la matriz principal en el instante $t_0 = 0$ del sistema $X' = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Solución: El polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \lambda^2 - (\mathrm{traza}\, A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3),$$

luego los VAPs son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -3$, ambos simples. Por tanto, la matriz A diagonaliza y resulta fácil calcular una base de VEPs. Una posible base es $\vec{v}_1 = (1,1)^t$ y $\vec{v}_2 = (1,2)^t$. Así pues,

$$\Phi(t) = \left(\vec{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \,\middle|\, \vec{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental. Finalmente, la matriz principal en el instante $t_0 = 0$ es igual a

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ 2(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}) & 2\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

---

2 puntos. Sea $x(t)$ la solución del PVI

$$x' = (t - x)x, \qquad x(t_0) = x_0.$$

¿Para qué condiciones iniciales (t_0, x_0) es constante la función $x(t)$; es decir, $x(t) \equiv x_0$? Descartando esos casos degenerados, ¿Para qué otras condiciones iniciales tiene $x(t)$ un máximo local en $t = t_0$? ¿Y un mínimo?

(Indicación: Podeis utilizar la EDO $x'(t) = (t - x(t))x(t)$ para calcular la segunda derivada.)

Solución: Si imponemos que la función constante $x(t) \equiv x_0$ cumpla la EDO, obtenemos que $0 = (t - x_0)x_0$ para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, las únicas condiciones iniciales que generan soluciones constantes son: $x_0 = 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Si imponemos que $x(t)$ tenga un punto crítico (sea máximo o mínimo) en el instante $t = t_0$, obtenemos que

$$0 = x'(t_0) = (t_0 - x(t_0))x(t_0) = (t_0 - x_0)x_0 \Longrightarrow x_0 = t_0 \text{ o } x_0 = 0.$$

Nos piden que descartemos en caso degenerado $x_0 = 0$, luego sólo nos queda la opción $x_0 = t_0 \neq 0$.

Finalmente, calculamos la segunda derivada para saber si los puntos críticos son máximos o mínimos:

$$x''(t_0) = (1 - x'(t_0))x(t_0) + (t_0 - x(t_0))x'(t_0) = x(t_0) = x_0,$$

donde hemos usado que $x'(t_0) = 0$. Por tanto,

- Si $x_0 = t_0 > 0$, entonces $x'(t_0) = 0$, $x''(t_0) = x_0 > 0$ y $x(t)$ tiene un mínimo local en $t = t_0$.
- Si $x_0 = t_0 < 0$, entonces $x'(t_0) = 0$, $x''(t_0) = x_0 < 0$ y $x(t)$ tiene un máximo local en $t = t_0$.
