Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 2 de noviembre de 2010 Depositado en `www.ma1.upc.edu/~edis/` Tiempo: 75 minutos

Apellidos, Nombre: ____

---

2 puntos.

1. Sea $x(t)$ la solución del PVI
$$x'' = \mathrm{e}^t x, \qquad x(0) = x_0, \qquad x'(0) = 0.$$
¿Para qué valores iniciales $x_0 \in \mathbb{R}$ es creciente la función $x(t)$ en $t = 0$? ¿Y decreciente? ¿Para qué valores iniciales $x_0 \in \mathbb{R}$ tiene $x(t)$ un máximo local en $t = 0$? ¿Y un mínimo?
2. Sea ahora $y(t)$ la solución del PVI
$$y'' = ty, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = 0.$$
¿Para qué valores iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ es creciente la función $y(t)$ en $t = 0$? ¿Y decreciente? ¿Para qué valores iniciales $y_0 \in \mathbb{R}$ tiene $y(t)$ un máximo local en $t = 0$? ¿Y un mínimo?

Solución: La función $x(t)$ tiene un punto crítico en $t = 0$, pues $x'(0) = 0$. Además, evaluando la EDO en $t = 0$ obtenemos que $x''(0) = x_0$. Por tanto, la función $x(t)$ tiene un mínimo local en $t = 0$ si $x_0 > 0$, un máximo local si $x_0 < 0$ y es idénticamente nula si $x_0 = 0$.

La función $y(t)$ también tiene un punto crítico en $t = 0$, pues $y'(0) = 0$. Evaluando la EDO en $t = 0$ obtenemos que $y''(0) = 0$. Derivando y evaluando en $t = 0$, resulta que $y'''(0) = y_0$. Por tanto, la función $y(t)$ tiene un punto de inflexión si $y_0 \neq 0$ y es idénticamente nula si $y_0 = 0$. Finalmente, $y(t)$ es creciente en $t = 0$ si $y_0 > 0$ y es decreciente si $y_0 < 0$.

---

3 puntos. Consideramos la EDO lineal no homogénea $x''' + 4x' = b(t)$.

1. Resolver la EDO homogénea asociada.
2. Encontrar, mediante el método de los coeficientes indeterminados, la "forma" que tiene una solución particular $x_{\mathrm{p}}(t)$ de la EDO no homogénea cuando $b(t) = t + t\mathrm{e}^t \sin 2t$. No se pide determinar el valor numérico de los coeficientes.
3. Ídem cuando $b(t) = \cos 2t$. ¿Cuántas soluciones periódicas tiene la EDO no homogénea en este caso?

Solución:

1. La tabla del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda$ es

Raíces	Mult.	Funciones
0	1	1
$\pm 2\mathrm{i}$	1	$\cos 2t, \sin 2t$

Por tanto, $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.

2. El polinomio λ^2 anula a la función t. El polinomio $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2$ anula a la función $t\mathrm{e}^t \sin 2t$. Por tanto, $P_1(\lambda) = \text{m.c.m.}\left[\lambda^2, (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2\right] = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2$ anula a cualquier combinación lineal de t y $t\mathrm{e}^t \sin 2t$. La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2$ es

Raíces	Mult.	Funciones
0	3	$1, \underline{t, t^2}$
$\pm 2\mathrm{i}$	1	$\cos 2t, \sin 2t$
$1 \pm 2\mathrm{i}$	2	$\underline{\mathrm{e}^t \cos 2t, \mathrm{e}^t \sin 2t, t\mathrm{e}^t \cos 2t, t\mathrm{e}^t \sin 2t}$

Sabemos que existe una solución particular que es combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la anterior: $x_{\mathrm{p}}(t) = c_4 t + c_5 t^2 + (c_6 + c_7 t)\mathrm{e}^t \cos 2t + (c_8 + c_9 t)\mathrm{e}^t \sin 2t$, siendo $c_4, \ldots, c_9$ coeficientes a determinar.

3. El polinomio $P_1(\lambda) = \lambda^2 + 4$ anula a la función $\cos 2t$. La tabla del producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 4)^2$ es

Raíces	Mult.	Funciones
0	1	1
$\pm 2\mathrm{i}$	2	$\cos 2t, \sin 2t, \underline{t \cos 2t, t \sin 2t}$

En este caso, existe una solución particular de la forma $x_{\mathrm{p}}(t) = c_4 t \cos 2t + c_5 t \sin 2t$, siendo c_4 y c_5 coeficientes a determinar, que no pueden ser ambos nulos. No existe ninguna solución periódica, pues $x_{\mathrm{h}}(t)$ siempre es acotada pero $x_{\mathrm{p}}(t)$ no.

---

2 puntos. Consideramos la EDO lineal $x'' = a(t)x$, donde $a(t)$ es una función cualquiera.

1. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de la EDO tales que $x_1(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 1$ y $x_1'(0) = 0$. ¿Son linealmente independientes? Calcular su Wronskiano $W(t)$.
2. Resolver la EDO sabiendo que $x_1(t) = t^r$ es una solución. Advertencia: Es necesario distinguir dos casos según el valor del exponente $r \in \mathbb{R}$.

Solución: 1. Las condiciones en $t = 0$ implican que $W(0) = x_1(0)x_2'(0) - x_2(0)x_1'(0) = 1 \neq 0$, luego las soluciones son linealmente independientes. Usando la fórmula de Liouville vemos que $W' = 0$, luego $W(t)$ es constante y $W(t) \equiv 1$.

2. Calculamos una segunda solución $x_2(t)$ mediante la fórmula de reducción de orden. Empezamos por el caso $r \neq 1/2$:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{\mathrm{e}^{-\int 0 \mathrm{d}t}}{\big(x_1(t)\big)^2} \mathrm{d}t = t^r \int t^{-2r} \mathrm{d}t = \frac{t^{1-r}}{1-2r}.$$

Para simplificar, tomamos $x_2(t) = t^{1-r}$, que también es solución, pues la EDO es homogénea. Por tanto, cuando $r \neq 1/2$ la solución general de la EDO es $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 t^r + c_2 t^{1-r}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres.

Si $r = 1/2$, entonces $x_2(t) = t^{1/2} \int t^{-1} \mathrm{d}t = t^{1/2} \ln t$ y $x_{\mathrm{h}}(t) = (c_1 + c_2 \ln t)\sqrt{t}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres.

---

3 puntos. Sea $L > 0$. Calcular los valores propios (VAPs) y las funciones propias (FUPS) del PVF

$$\begin{cases} x'' + 8x' + 16x = \lambda x \\ x'(0) = 0 \\ x'(L) = 0 \end{cases}.$$

(Indicación: Todos los VAPs son negativos.)

Solución: Buscamos VAPs de la forma $\lambda = -\mu^2$ para algún $\mu > 0$. El polinomio característico de la EDO homogénea es $P(m) = m^2 + 8m + 16 - \lambda = m^2 + 8m + 16 + \mu^2$. Sus raíces son

$$m_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 16 - \mu^2} = -4 \pm \mu \mathrm{i}.$$

Por tanto, la solución general de la EDO es $x_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^{-4t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres. Ahora imponemos las condiciones de frontera. La primera da lugar a la ecuación $\mu c_2 - 4c_1 = x'(0) = 0$, luego $c_1 = \mu c_2/4$ y c_2 queda, de momento, libre. Al simplificar la segunda vemos que

$$\mathrm{e}^{-4L}(16 + \mu^2)c_2 \sin \mu L = \mathrm{e}^{-4L}\big((\mu c_2 - 4c_1)\cos \mu L - (4c_2 + \mu c_1)\sin \mu L\big) = x'(L) = 0.$$

Por tanto, para obtener soluciones no triviales necesitamos que $\sin \mu L = 0$. Es decir, $\mu = \mu_n = n\pi/L$ con $n \geq 1$. Así pues, encontramos infinitos VAPs negativos de la forma

$$\lambda_n = -\mu_n^2 = -n^2\pi^2/L^2, \qquad n \geq 1.$$

Recordando que $c_1 = \mu c_2/4 = n\pi c_2/4L$ y tomando $c_2 = 4L$, obtenemos las infinitas FUPs asociadas:

$$x_n(t) = \mathrm{e}^{-4t}\big(n\pi \cos(n\pi t/L) + 4L \sin(n\pi t/L)\big), \qquad n \geq 1.$$
