

### Problemes

1. (a) Sigui  $A(t)$  una matriu que depèn del temps, però que té un vector propi  $\vec{v}$  constant de valor propi  $\lambda(t)$ . Demostreu que llavors  $X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} \cdot \vec{v}$  és una solució del sistema lineal i homogeni  $X' = A(t)X$ .
- (b) Sigui  $A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}$ . Useu l'apartat (a) per trobar una matriu fonamental del sistema  $X' = A(t)X$ .
- (c) Trobeu la solució general del sistema

$$X' = A(t)X + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},$$

on  $A(t)$  és la matriu de l'apartat (b).

#### Resolució:

- (a) Si  $\vec{v}$  és un vector propi de valor propi  $\lambda(t)$  de la matriu  $A(t)$ , aleshores  $A(t)\vec{v} = \lambda(t)\vec{v}$ ,  $\forall t$ . Comprovem si el vector  $X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} \vec{v}$  compleix el sistema  $X'(t) = A(t)X(t)$ :

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda(t) \cdot e^{\int \lambda(t) dt} \vec{v} = e^{\int \lambda(t) dt} \lambda(t) \vec{v} = \\ &= e^{\int \lambda(t) dt} A(t) \vec{v} = A(t) e^{\int \lambda(t) dt} \lambda(t) \vec{v} = A(t) X(t) \end{aligned}$$

- (b) Sigui  $A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}$ . Comencem calculant el seu polinomi característic:

$$Q_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-t-\lambda & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (t+1)\lambda + t$$

$$\text{Valors propis: } \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(t) = \frac{t+1 \pm \sqrt{(t+1)^2 - 4t}}{2} = \frac{t+1 \pm (t-1)}{2} \begin{cases} \nearrow \lambda_1(t) = t \\ \searrow \lambda_2(t) = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vectors propis: Nuc } [A(t) - \lambda_2(t)I] = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 1-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-2 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2]$$

$$\text{Nuc } [A(t) - \lambda_1(t)I] = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2-2t & 2t-2 \\ 1-t & t-1 \end{pmatrix} = [\vec{v}_1],$$

on  $\vec{v}_1 = (1, 1)$  i  $\vec{v}_2 = (2, 1)$  són constants.

*Observació:* Si  $t = 1$ , llavors  $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1$  valor propi doble i  $A(t) = I$ , per tant,  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  també són vectors propis.

$$\left. \begin{aligned} X_1(t) &= e^{\int \lambda_1(t) dt} \vec{v}_1 = e^{\int t dt} \vec{v}_1 = e^{(t^2/2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ X_2(t) &= e^{\int \lambda_2(t) dt} \vec{v}_2 = e^{\int 1 dt} \vec{v}_2 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{són solucions del sistema.}$$

A més,  $W(t) = \det[X_1(t), X_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{(t^2/2)} & 2e^t \\ e^{(t^2/2)} & e^t \end{vmatrix} = -e^{(t^2/2)+t} \neq 0, \forall t$ . Per tant, són linealment independents i obtenim la matriu fonamental

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(t^2/2)} & 2e^t \\ e^{(t^2/2)} & e^t \end{pmatrix}.$$

(c) La solució del sistema homogeni és

$$X_h(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{(t^2/2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ara busquem una solució particular del sistema no homogeni mitjançant la fórmula de variació de paràmetres:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \phi(t) \int \phi(t)^{-1} F(t) dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^{(t^2/2)} & 2e^t \\ e^{(t^2/2)} & e^t \end{pmatrix} \int \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} e^t & -2e^t \\ -e^{(t^2/2)} & e^{(t^2/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^{(t^2/2)} & 2e^t \\ e^{(t^2/2)} & e^t \end{pmatrix} \int -e^{-((t^2/2)+t)} \begin{pmatrix} -te^t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^{(t^2/2)} & 2e^t \\ e^{(t^2/2)} & e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} te^{-(t^2/2)} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (a) Calculeu la solució general de l'equació lineal homogènia  $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$ .  
 (b) Per a quina freqüència  $\omega_0 > 0$  té l'equació homogènia anterior solucions periòdiques de període mínim  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ?  
 (c) Donada una amplitud  $A$  i una freqüència  $\omega \neq \omega_0$ , calculeu mitjançant el mètode dels coeficients indeterminats una solució particular  $y_p(x)$  periòdica de l'equació no homogènia

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = A \sin(\omega x).$$

(Comprovació útil:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} y_p(x) = 0$ .)

- (d) Calculeu explícitament el factor d'amplificació  $M$  tal que la solució  $y_p(x)$  de l'apartat (c) s'escriu com  $y_p(x) = MA \sin(\omega x + \varphi)$  en forma amplitud-fase.

(Comprovació útil:  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} M = +\infty$ .)

- (e) Té alguna solució periòdica l'equació no homogènia quan  $\omega = \omega_0$ ? Per què?

### Resolució:

- (a) Equació característica:  $p(m) = m^3 + 2m^2 + 9m + 18$ . Busquem una solució entera  $m \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$ , que a més ha de ser negativa. Per tanteig,  $m = -2$  és solució. Apliquem Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 9 & 18 \\ & & -2 & 0 & -18 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$p(m) = (m + 2)(m^2 + 9)$ . Les arrels de  $p(m)$  són  $\{-2, \pm 3i\}$ .

Solució general de l'equació diferencial ordinària homogènia

$$g(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Si volem solucions periòdiques de (a) cal  $c_1 = 0$  i llavors  $w_0 = 3$ .

(c) Busquem  $y_p(x) = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$ . Cal que

$$w^3(\alpha \sin wx + \beta \cos wx) - 2w^2(\alpha \cos wx + \beta \sin wx) + 9w(-\alpha \sin wx + \beta \cos wx + 18(\alpha \cos wx + \beta \sin wx)) = A \sin(wx).$$

Obtenim:

$$\left. \begin{aligned} (w^3 - 9w)\alpha - (-2w^2 + 18)\beta &= A \\ (-2w^2 + 18)\alpha + (-w^3 + 9w)\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w\alpha - 2\beta &= \frac{A}{w^2 - 9} \\ 2\alpha + w\beta &= 0 \end{aligned}$$

Llavors,

$$\alpha = \frac{wA}{(w^2 - 9)(w^2 + 4)}$$

$$\beta = \frac{-2A}{(w^2 - 9)(w^2 + 4)}$$

Així doncs,  $y_p(x) = \frac{A}{(w^2 - 9)(w^2 + 4)}(w \cos(wx) - 2 \sin(wx))$ .

*Observació:* Si  $w \neq \pm 3$ , llavors el denominador no s'anul·la.

Comprovació:  $\lim_{w \rightarrow 0} \alpha = 0$ ,  $\lim_{w \rightarrow 0} \beta = \frac{A}{18}$ ,  $\lim_{w \rightarrow 0} y_p = 0 \cdot 1 + \frac{A}{18} \cdot 0 = 0$ .

(d) L'amplitud de  $y_p(x)$  és:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{A}{|w^2 - 9|\sqrt{w^2 + 4}} = A \cdot M \implies M = \frac{1}{|w^2 - 9|\sqrt{w^2 + 4}}.$$

Clarament  $\lim_{w \rightarrow 3} M = +\infty$ .

(e) Si  $w = 3$  llavors el polinomi anul·lador de grau mínim del terme independent  $f(x) = A \sin(3x)$  és  $Q(D) = D^2 + 9$  i les seves arrels són  $\pm 3i$ , que també ho són de l'equació característica de la part homogènia de l'equació diferencial ordinària. Això vol dir que hi ha una solució particular de la forma  $y_p(x) = \alpha x \cos(3x) + \beta x \sin(3x)$ , on  $\alpha$  i  $\beta$  no poden ser totes dues zero. Així doncs,  $y_p(x)$  no és periòdica i per tant, l'equació diferencial ordinària no homogènia no té cap solució periòdica.