

Problemes

1. Considerem el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = xy + 12 \\ y' = x^2 + y^2 - 25 \end{cases}$$

- Calculeu els seus quatre punts crítics.
- Classifiquem el sistema linealitzat associat a cada punt crític.
- Estudieu per linealització l'estabilitat del sistema no lineal en cada punt crític.

Resolució:

- Busquem la intersecció de les corbes $\{xy + 12 = 0\}$ i $\{x^2 + y^2 = 25\}$. De la primera equació aïllem $y = -12/x$ i la substituïm en la segona equació, obtenint l'equació biquadrada

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

les arrels de la qual són $x = \pm 3, \pm 4$. Per tant, els quatre punts crítics són

$$(4, -3), \quad (-4, 3), \quad (3, -4), \quad (-3, 4).$$

- La matriu del sistema linealitzat entorn un punt crític (x_0, y_0) és

$$A = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}.$$

En particular, $T = \text{Traza } A = 3y_0$ i $D = \det A = 2(y_0^2 - x_0^2)$.

En els punts crítics $(4, -3)$ i $(-4, 3)$, el determinant és negatiu: $D = -14$, per tant, tenim selles.

En els punts crítics $(-3, 4)$ i $(3, -4)$, la traça és no nul·la: $T = \pm 12$, el determinant és positiu: $D = 14$, i el discriminant és positiu: $\Delta = T^2 - 4D = 88 > 0$, així doncs tenim nodes propis. A més, el node del punt $(-3, 4)$ és inestable (ja que té traça positiva), i l'altre és asimptòticament estable (ja que té traça negativa).

- Tots els punts crítics, excepte el punt $(-3, 4)$, són inestables en el sistema no lineal, ja que tenen el menys un VAP positiu. En canvi, el punt $(-3, 4)$ és asimptòticament estable, ja que té dos VAPs negatius.

2. Considereu l'equació diferencial

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 4N^2 y = 0, \quad (1)$$

on $N \geq 1$ és un paràmetre enter.

- Si desenvolupem una solució com una sèrie de potències centrada a l'origen, $y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, trobeu la llei de recurrència que satisfan els coeficients a_k .

- (b) Proveu que la solució de (1) que satisfà les condicions inicials $y(0) = (-1)^N$, $y'(0) = 0$ és un polinomi de grau $2N$, que només té termes de grau parell.
- (c) Proveu que, si fem el canvi de variable independent $x = \cos t$, l'equació (1) es transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4N^2y = 0. \quad (2)$$

- (d) Trobeu la solució general de l'equació diferencial (2) en funció de t .
- (e) Deduïu de (c) i de (d) que el polinomi trobat a (b) es pot escriure en la forma $P_N(x) = \cos(2N \arccos x)$, $x \in (-1, 1)$.

Resolució:

- (a) Usant que $xy'(x) = \sum_{k \geq 1} ka_k x^k$, $y''(x) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k$,
 $x^2 y''(x) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)a_k x^k$, tenim

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 4N^2y &= \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k \geq 2} k(k-1)a_k x^k - \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} ka_k x^k + 4N^2 \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \\ &= [2a_2 + 4N^2 a_0] + [6a_3 + (4N^2 - 1)a_1]x + \sum_{k \geq 2} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (4N^2 - k^2)a_k]x^k. \end{aligned}$$

Igualant els coeficients a zero, obtenim la recurrència:

$$\begin{aligned} a_0, a_1 &\text{ qualssevol,} \\ a_{k+2} &= \frac{k^2 - 4N^2}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Per acomplir les condicions inicials, hem de prendre $a_0 = (-1)^N$ i $a_1 = 0$. Llavors tots els coeficients de grau senar s'anul·len. D'altra banda, a partir de a_0 podem anar calculant a_2, a_4, \dots, a_{2N} , però segons la recurrència trobada a (a), resulta $a_{2N+2} = 0$, i tots els coeficients que segueixen seran també nuls. Per tant, la sèrie solució és un polinomi de grau $2N$ que només té termes de grau parell.
- (c) Primer, relacionem les derivades respecte x i t segons el canvi proposat:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = -\frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

Substituint a l'equació (1), obtenim l'equació diferencial

$$(1 - \cos^2 t) \left(-\frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \cos t \frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} + 4N^2y = 0 \implies y'' + 4N^2y = 0,$$

- (d) D'on resulta l'equació (2), que té com a solució general $y(t) = c_1 \cos 2Nt + c_2 \sin 2Nt$.
- (e) L'equació (2) té $\cos 2Nt$ entre les seves solucions i, desfer el canvi de (c), l'equació (1) té $P_N(x) = \cos(2N \arccos x)$ com a solució. Com que $P_N(0) = \cos N\pi = (-1)^N$ i $P'_N(0) = 0$ (hem usat que $\arccos 0 = \pi/2$), aquesta solució coincideix amb el polinomi trobat a (b) ja que satisfà les mateixes condicions inicials.