

### Problemes

1. Considereu l'equació diferencial de segon ordre

$$x'' + (a + 3x^2)x' + x = 0,$$

essent  $a \geq 0$  un paràmetre real.

(a) Si definim  $y = x' + ax + x^3$ , vegeu que  $(x, y)$  són solució del sistema de primer ordre

$$\left. \begin{aligned} x' &= y - ax - x^3 \\ y' &= -x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(b) Calculeu el sistema linealitzat de (1) en el punt fix  $(0, 0)$  i classifiqueu-lo en funció de  $a \geq 0$ .

(c) Discutiu a partir del sistema linealitzat l'estabilitat del punt fix  $(0, 0)$  del sistema (1), sempre que això sigui possible.

(d) Pel cas  $a = 0$ , apliqueu el mètode de les funcions de Lyapunov a (1), usant  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

### Resolució:

$$(a) \quad y = x' + ax + x^3 \implies x' = y - ax - x^3 \implies y' = x'' + ax' + 3x^2x' \underset{x'' = -(a+3x^2)x' - x}{=} -x$$

(b) Tenim

$$f(x, y) = y - ax - x^3 \quad f(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -a - 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$g(x, y) = -x \quad g(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Sistema linealitzat en  $(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } A &= -a \\ \det A &= 1 > 0 \\ \Delta &= a^2 - 4 \end{aligned}$$

Polinomi característic:  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + 1$

Valors propis:  $\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

•  $a = 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm i \implies$  centre.

•  $0 < a < 2 \implies \lambda_{\pm}$  valors propis complexos conjugats de part real  $-a/2 < 0 \implies$  focus estable.

•  $a = 2 \implies \lambda_{\pm} = -1$  valor propi real doble i  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  no diagonalitza  $\implies$  node impropri estable.

•  $a > 2 \implies \lambda_{\pm}$  valors propis reals diferents amb  $\lambda_+ \cdot \lambda_- = \det A = 1$  i  $\lambda_+ + \lambda_- = \text{tr } A = -a < 0 \implies \lambda_{\pm}$  negatius  $\implies$  node propi estable.

(c) Tenim:

•  $a = 0 \implies$  no podem decidir l'estabilitat de  $(0, 0)$  en (1) usant el sistema linealitzat.

•  $a > 0 \implies (0, 0)$  és un punt fix asimptòticament estable de (1).

(d)  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$  definida positiva en  $(0, 0)$

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g \underset{a=0}{=} x(y - x^3) + y(-x) = -x^4 \leq 0$$

$W(x, y)$  és semi-definida negativa en  $(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$  és un punt fix estable de (1), encara que no podem dir res de si és asimptòticament estable o no.

2. Considerem el sistema  $X' = AX$ , on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i els VAP's de la qual són:  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  i  $\lambda_3 = 2$ .

(a) Calculeu una matriu fonamental real del sistema.

(b) Resoleu el problema de Cauchy  $X' = AX$ ,  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  i trobeu la recta de  $\mathbb{R}^3$  que conté la solució.

(c) Resoleu el problema de Cauchy  $X' = AX$ ,  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  i trobeu el pla (perpendicular a la recta anterior) de  $\mathbb{R}^3$  que conté la solució.

(d) Dibuixeu la recta, el pla i les dues trajectòries que s'obtenen a partir de les solucions d'ambdós problemes de Cauchy. Marqueu el sentit del gir de la trajectòria continguda en el pla.

### Resolució:

(a) Busquem un vector propi de valor propi  $\lambda_1 = i$

$$v_1 = (x, y, z) \in \ker(A - i\text{Id}) \iff (A - i\text{Id})v_1 = 0 \iff$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} -i & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1-i & -1 \\ -1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + (1-i)y - z = 0 \\ -x - y + (1-i)z = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

restem:  $(2-i)y + (i-2)z = 0 \implies y = z \implies -x - iy = 0 \implies x = -iy$ .

Fent  $y = 1$ :  $v_1 = (-i, 1, 1)$ .

Busquem un vector propi de valor propi  $\lambda_3 = 2$

$$v_3 = (x, y, z) \in \ker(A - 2\text{Id}) \iff (A - 2\text{Id})v_3 = 0 \iff$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + 1/2y + 1/2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z = 0 \implies y = -z \implies x = 0; \quad v_3 = (0, 1, -1).$$

Calculem un conjunt fonamental de solucions:

$$\lambda_1 = i = \alpha + i\beta \quad (\alpha = 0, \beta = 1), \quad v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Re } v_1 + i \text{Im } v_1$$

$$X_1(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \text{Re } v_1 - \sin \beta t \text{Im } v_1) = \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{\alpha t}(\sin \beta t \operatorname{Re} v_1 + \cos \beta t \operatorname{Im} v_1) = \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = e^{\lambda_3 t} v_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una matriu fonamental és:  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & e^{2t} \\ \cos t & \sin t & -e^{2t} \end{pmatrix}$

- (b) Observeu que  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  és un vector propi de valor propi 2 de  $A$ . Així,  $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \implies$  Eliminant el paràmetre  $t$  de  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$  aleshores, és clar que  $\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  és la recta buscada.

- (c) Busquem  $X(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  tal que  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Tenim

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -c_2 = 1 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases}$$

d'on  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $c_2 = -1$ . Així,  $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ . Si  $X(t)$  pertany a un pla  $\implies X(t)$  és solució d'una equació (del pla) del tipus  $Ax + By + Cz + D = 0 \implies A \cos t - \sin t(B + C) + D = 0$ ,  $\forall t \implies A = 0$ ,  $B + C = 0$  i  $D = 0 \implies$  el pla és  $y - z = 0$  (ortogonal a la recta anterior).

- (d) Pel sentit de gir de la solució en la pla mirem  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

