

Problemes

1. Considereu el problema de valors inicials:

$$(*) \quad \begin{cases} y'' - (x+1)y' + y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Trobeu, en forma de sèrie de potències al voltant de $x = 0$ fins a ordre 5:

- (a) la solució de l'equació diferencial ordinària homogènia associada a (*).
 (b) una solució particular de l'equació diferencial ordinària completa.
 (c) la solució de (*).

Resolució:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \text{Si } y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad y'' - (x+1)y' + y = 0 \iff \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ 0 &\iff \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \\ &\implies \begin{cases} 2a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ a_{k+2} = \frac{(k+1)a_{k+1} + (k-1)a_k}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolent la recurrència fins a ordre 5, tenim: $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$; $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 - a_0)$; $a_3 = \frac{1}{6}(a_1 - a_0)$;
 $a_4 = \frac{1}{12}(a_1 - a_0)$; $a_5 = \frac{1}{30}(a_1 - a_0)$.

Aleshores, $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$, amb

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \\ y_1(x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \dots \end{aligned}$$

- (b) Per a la solució particular (fins a ordre 5), tenint en compte que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ i repetint el càlcul anterior, tenim que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Aleshores, per exemple, escollint $a_0 = 0$ i $a_1 = 2$, i amb un càlcul anàleg al de l'apartat (a), obtenim que $y_p(x) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{x^5}{12} + \dots$.

- (c) La solució del problema de valor inicial és $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + y_p(x)$, amb a_0, a_1 tals que $y(0) = 1$ i $y'(0) = 2$. Però com $y(0) = a_0$ i $y'(0) = a_1 + 2$, aleshores $a_0 = 1$ i $a_1 = 0 \implies y(x) = y_0(x) + y_p(x)$.

2. Considereu el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - ay \end{cases}$$

amb $a > 0$.

- (a) Determineu els punts crítics, observeu que no depenen de a i escriviu els sistemes linealitzats.
- (b) Classifiqueu els sistemes linealitzats i indiqueu la seva estabilitat, sempre en funció de a .
- (c) Deduiu, sempre que sigui possible, l'estabilitat o inestabilitat per al sistema no lineal.

Resolució:

(a) $f(x, y) = y; g(x, y) = x - x^3 - ay$

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$$

Aleshores els punts d'equilibri són $(0, 0); (1, 0); (-1, 0)$.

Tenim que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -a \end{pmatrix}$, per tant en cada punt (respectivament) d'equilibri, el sistema linealitzat és:

- (en el $(0, 0)$) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- (en els punts $(1, 0), (-1, 0)$) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) i (c) • En $(0, 0)$: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(a + \lambda) - 1$. Els valors propis són $\lambda_+ = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2} > 0$ i $\lambda_- = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2} < 0$. Aleshores, $\forall a > 0$ el $(0, 0)$ és un punt de sella del sistema linealitzat i un punt inestable del sistema no lineal.

• En $(\pm 1, 0)$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -a \end{pmatrix}$; $|A - \lambda I| = \lambda(a + \lambda) + 2 = \lambda^2 + a\lambda + 2$; $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$.

Aleshores:

- si $a > 2\sqrt{2}$, tenim que $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ i tenim dos nodes propis asimptòticament estables del sistema linealitzat i per tant $(\pm 1, 0)$ són punts asimptòticament estables en el sistema no lineal.
- si $a = 2\sqrt{2}$, la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ no diagonalitza i com $\lambda_+ = \lambda_- < 0$, tenim dos nodes impropis asimptòticament estables per al sistema linealitzat, i per tant $\pm 1, 0$ són asimptòticament estables en el sistema no lineal.
- si $a \in (0, 2\sqrt{2})$, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Com $Re(\lambda_+), Re(\lambda_-)$ són negatius, tenim dos focus asimptòticament estables per al sistema linealitzat, i per tant $(\pm 1, 0)$ són asimptòticament estables per al sistema no lineal.