Equacions Diferencials **Codi: 22701**

Temps: 1 hora 30 minuts **29 de Juny de 2004**

Problemes

1. Considereu el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = x(y-\mu) \\ y' = -y(x-\mu) \end{cases}$$

on $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ és una constant. Es demana per a $\mu \neq 0$:

(a) Determineu els punts crítics del sistema no lineal i la matriu del sistema linealitzat entorn cadascun d'ells.

(b) Per a cada punt crític, estudieu l'estabilitat del sistema linealitzat associat.

(c) Per a cada punt crític, sigui $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solució del sistema linealitzat associat, tal que $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Existeix algun valor de μ tal que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $t \to +\infty$?

(d) Estudieu l'estabilitat dels punts crítics del sistema no lineal, pel mètode de linealització.

Resolució:

(a) Com que els punts crítics han de complir que $\begin{cases} x(y-u) = 0 \\ -y(x-\mu) = 0 \end{cases}$, els dos punts possibles són $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$, que són diferents perquè $\mu \neq 0$. El sistema linealitzat associat al $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. I l'associat al $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(b)
  i. Sistema linealitzat associat al $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Els valors propis de la matriu associada són $-\mu$ i μ, que són reals i diferents perquè $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. En particular, tenen diferents signe, de manera que n'hi haurà un d'estrictament positiu. Per tant, el $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un equilibri inestable d'aquest sistema lineal (i és una sella).

  ii. Sistema linealitzat associat al $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$: Els valors propis són $\pm i|\mu|$. Per tant, el $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ és un equilibri estable, però no asimptòticament estable, d'aquest sistema lineal (i és un centre).

(c) Fem els dos casos:

  i. Sistema associat al $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Com que la matriu ja està en forma diagonal, tenim clarament que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és vector propi de valor propi $-\mu$, que és estrictament negatiu si $\mu > 0$. Per tant, si $\mu > 0$ tenim $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $t \to +\infty$ per a aquesta solució particular.

ii. Sistema associat al $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$: Com que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un centre del sistema lineal associat per a qualsevol $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, no hi ha cap valor de $\mu \neq 0$ per al qual $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $t \to +\infty$.

(d) Pel teorema d'estabilitat per linealització, el $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un equilibri inestable del sistema no lineal per a tot $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, ja que sempre tenim un dels dos valors propis estrictament positiu. En canvi, no podem dir res de l'estabilitat de $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ en el sistema no lineal, ja que tots els valors propis del sistema linealitzat associat tenen part real igual a 0.

2. Considereu l'equació diferencial ordinària

$$y'' - x^2 y' + 3y = x\,. \tag{1}$$

(a) Determineu si $x_0 = 0$ és un punt ordinari, un punt singular-regular o un punt singular-irregular de l'equació diferencial ordinària homogènia associada a (1). Deduïu quant val r de forma que $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r}$, amb $c_0 \neq 0$, sigui solució de (1).

(b) Sigui $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r}$ la solució d'aquesta equació diferencial ordinària tal que $y(0) = y'(0) = 0$ i $y_k(x) = \sum_{n=0}^{k} c_n x^{n+r}$ la seva aproximació d'ordre k. Calculeu $y_5(x)$.

Resolució:

(a) Com que $p(x) = -x^2$ i $q(x) = 3$ són analítics en $x_0 = 0$, aquest és un punt ordinari de l'homogènia associada a (1). Per tant, les solucions seran de la forma $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, és a dir, que $r = 0$.

(b) Si $y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ ha de complir que $y(0) = y'(0) = 0$, automàticament $c_0 = c_1 = 0$.
Si imposem que que $y(x)$ verifiqui (1), arribem a la següent igualtat:

$$(2c_2 + 3c_0) + (6c_3 + 3c_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}(k-1) + 3c_k] x^k = x.$$

Igualant coeficient i imposant que $c_0 = c_1 = 0$, tenim:

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ 6c_3 = 1 \\ c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}(k-1) + 3c_k = 0\,, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

d'on $c_2 = 0$, $c_3 = 1/6$, $c_4 = 0$ i $c_5 = -1/40$, obtenint $y_5(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{40}x^5$.