Equacions Diferencials **Codi: 22701**

Temps: 1 hora 30 minuts 10 de Juny de 2003

Problemes

1. Considereu el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ay \\ y' = -x^3 - y^3 \end{array} \right. \tag{1}$$

on $a > 0$ és un paràmetre real.

(a) Trobeu la solució general del sistema linealitzat entorn del punt crític $(0, 0)$. Decidiu sobre l'estabilitat del $(0, 0)$ en aquest sistema lineal, distingint, si cal, diferents valors de $a > 0$.

(b) Què impliquen els resultats de l'apartat (a) sobre l'estabilitat del $(0, 0)$ en el sistema no lineal (1)?

(c) Busqueu funcions de Lyapunov de la forma $V(x, y) = x^4 + by^2$, elegint adequadament el nombre real b, i deduïu tota la informació que us sigui possible sobre l'estabilitat del $(0, 0)$ en el sistema no lineal (1).

Resolució:

(a) El sistema linealitzat, escrit en forma matricial, és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

i la seva solució general és $y(t) = C_1$, $x(t) = C_2 + aC_1 t$. Prenent, per exemple, $C_2 = 0$ i $C_1 > 0$ arbitràriament petita, obtenim solucions que per $t = 0$ estan arbitràriament a prop de $(0, 0)$ però que $x(t) \to \infty$ quan $t \to \infty$. Per tant $(0, 0)$ és inestable per aquest sistema linealitzat per a qualsevol valor de $a > 0$.

(b) La matriu del sistema linealitzat té el valor propi doble $\lambda = 0$. Per tant no implica res sobre l'estabilitat en el sistema no lineal.

(c) La funció $V = x^4 + by^2$ és definida positiva per a qualsevol valor de $b > 0$. Com que $W = (d/dt)V = 4ax^3y - 2bx^3y - 2by^4$, si elegim $b = 2a$ ens queda que W és semidefinida negativa (atenció, no és definida negativa), i per tant concloem que $(0, 0)$ és estable pel sistema no lineal per a qualsevol valor de $a > 0$.

2. (a) Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària lineal a coeficients constants

$$y^{\text{iv})} - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = \cos x\,. \tag{2}$$

(b) Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària lineal a coeficients constants

$$z^{\text{iv})} - z = xe^{\alpha x}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \alpha \neq \pm 1 \tag{3}$$

segons els valors de α.

(c) Per a quin valor de α (2) i (3) tenen almenys una solució comuna?

(d) Sigui α_0 el valor trobat a (c). Trobeu totes les solucions comunes de (2) i (3), quan $\alpha = \alpha_0$.

Resolució:

(a) El polinomio característico es

$$P(m) = m^4 - 4m^3 + 3m^2 + 4m - 4 = (m-2)^2(m-1)(m+1)$$

luego la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_{\mathrm{h}}(x) = \mathrm{e}^{2x}(a_1 + a_2 x) + a_3\mathrm{e}^{x} + a_4\mathrm{e}^{-x} \qquad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Además, el polinomio que anula al término no homogéneo es $P_1(m) = m^2 + 1$. Así pues, un candidato a solución particular es $y_{\mathrm{p}}(x) = a_5 \cos x + a_6 \sin x$. Imponiendo que $y_{\mathrm{p}}(x)$ cumpla la ecuación, obtenemos que $a_5 = -3/50$ y $a_6 = 2/25$. Por tanto, la solución general es

$$y_{\mathrm{g}}(x) = \mathrm{e}^{2x}(a_1 + a_2 x) + a_3\mathrm{e}^{x} + a_4\mathrm{e}^{-x} - \frac{3}{50}\cos x + \frac{2}{25}\sin x \qquad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) El polinomio característico es $Q(m) = m^4 - 1 = (m^2+1)(m-1)(m+1)$, luego la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$z_{\mathrm{h}}(x) = b_1 \cos x + b_2 \sin x + b_3\mathrm{e}^{x} + b_4\mathrm{e}^{-x} \qquad b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}.$$

El polinomio que anula a su término no homogéneo es $Q_1(m) = (m-\alpha)^2$. Si $\alpha \neq \pm 1$, un candidato a solución particular es $z_{\mathrm{p}}(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(b_5 + b_6 x)$ e imponiendo que $z_{\mathrm{p}}(x)$ cumpla realmente la edo, obtenemos que $b_5 = -4\alpha^3/(\alpha^4-1)^2$ y $b_6 = 1/(\alpha^4-1)$.
Por tanto, si $\alpha \neq \pm 1$, la solución general es

$$z_{\mathrm{g}}(x) = \quad b_1 \cos x + b_2 \sin x + b_3\mathrm{e}^{x} + b_4\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{(\alpha^4-1)^2}\big(-4\alpha^3 + (\alpha^4-1)x\big)$$

donde $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ son parámetros libres.

(c) Comparando las dos soluciones generales, vemos que $\alpha = 2$ es la única posiblidad.

(d) Cuando $\alpha = 2$, la solución general de la segunda ecuación es

$$z_{\mathrm{g}}(x) = b_1 \cos x + b_2 \sin x + b_3\mathrm{e}^{x} + b_4\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{x}{15} - \frac{32}{225}\right) \qquad b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}.$$

Entonces $y_{\mathrm{g}}(x) = z_{\mathrm{g}}(x)$ si y sólo si

$$a_1 = -\frac{32}{225} \qquad a_2 = \frac{1}{15} \qquad b_1 = -\frac{3}{50} \qquad b_2 = \frac{2}{25} \qquad b_3 = a_3 \qquad b_4 = a_4.$$

Por tanto, cuando $\alpha = 2$ hay infinitas soluciones comunes:

$$w(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{x}{15} - \frac{32}{225}\right) - \frac{3}{50}\cos x + \frac{2}{25}\sin x + c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$