

Problemes

1. Considereu l'equació diferencial ordinària

$$2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0, \quad x > 0.$$

- (a) Calculeu les arrels indicials en $x_0 = 0$.
- (b) Doneu la forma d'un conjunt fonamental $\{y_1(x), y_2(x)\}$ entorn $x_0 = 0$.
- (c) Doneu la recurrència dels coeficients de $y_1(x)$ i de $y_2(x)$.
- (d) Trobeu els quatre primers termes dels desenvolupaments en sèrie de les funcions $y_1(x)$ i $y_2(x)$.

Resolució:

$$(a) \left. \begin{aligned} P(x) &= -\frac{3+2x}{2x} \\ Q(x) &= \frac{1}{2x} \end{aligned} \right\} \text{analítiques en } x \neq 0; \quad \left. \begin{aligned} xP(x) &= -\frac{3+2x}{2} \\ x^2Q(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \text{analítiques en } x = 0.$$

$\implies x = 0$ és un punt singular regular.

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \lim_{x \rightarrow 0} xP(x) = -\frac{3}{2} \\ q_0 &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \text{l'equació indicial és } r(r-1) + p_0r + q_0 = 0.$$

$$r(r-1) - \frac{3}{2}r = 0; \quad r\left(r - \frac{5}{2}\right) = 0 \implies \text{les arrels indicials són } r_2 = 0 \text{ i } r_1 = \frac{5}{2}.$$

- (b) Com que $r_1 - r_2 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, estem en cas 1 i sabem que existeix un conjunt fonamental de solucions de la forma

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+r_1} = x^{5/2} \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \text{amb } a_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= \sum_{n \geq 0} b_n x^{n+r_2} = \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \quad \text{amb } b_0 \neq 0 \end{aligned} \right.$$

- (c) Imposem que la sèrie $y(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^{n+r}$ compleixi l'equació diferencial ordinària

$$\begin{aligned} 0 &= 2xy'' - 2xy' - 3y' + y \\ &= \left\{ 2 \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n-1} - 2 \sum_{n \geq 0} (n+r)c_n x^n - 3 \sum_{n \geq 0} (n+r)c_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} c_n x^n \right\} x^r = \\ &= \left\{ 2 \sum_{k \geq -1} (k+r+1)(k+r)c_{k+1} x^k - 2 \sum_{k \geq 0} (k+r)c_k x^k - 3 \sum_{k \geq -1} (k+r+1)c_{k+1} x^k + \sum_{k \geq 0} c_k x^k \right\} x^r = \\ &= \left\{ (2r(r-1) - 3r)c_0 + \sum_{k \geq 0} [(2k+2r-3)(k+r+1)c_{k+1} - (2k+2r-1)c_k] x^k \right\} x^r \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (2r^2 - 5r)c_0 = 0 \xrightarrow{c_0 \neq 0} 2r^2 - 5r = 0 &\begin{cases} r_1 = 5/2 \\ r_0 = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{recuperem les arrels indicials.}$$

$$\implies c_{k+1} = \frac{2k+2r-1}{(2k+2r-3)(k+r+1)} c_k, \quad \forall k \geq 0.$$

- Cas $r = r_1 = 5/2$: $a_0 \in \mathbb{R}$ lliure, no nul

$$a_{k+1} = \frac{2k+4}{(2k+2)(k+(7/2))} a_k = \frac{2k+4}{(k+1)(2k+7)} a_k, \quad \forall k \geq 0$$
- Cas $r = r_2 = 0$: $b_0 \in \mathbb{R}$ lliure, però no nul

$$b_{k+1} = \frac{2k-1}{(2k-3)(k+1)} b_k, \quad \forall k \geq 0$$

(d) Apliquem les fórmules recurrents anteriors fins a $k = 3$:

$$a_0 \in \mathbb{R} \text{ lliure, però no nul}$$

$$a_1 = \frac{4}{7} a_0; \quad a_2 = \frac{6}{2 \cdot 9} a_1 = \frac{a_2}{3} = \frac{4}{21} a_0; \quad a_3 = \frac{8}{3 \cdot 11} a_2 = \frac{32}{693} a_0; \quad \dots$$

$$\Rightarrow y_1(x) = a_0 x^{5/2} \left(1 + \frac{4}{7} x + \frac{4}{21} x^2 + \frac{32}{693} x^3 + \dots \right) \text{ amb } a_0 \neq 0.$$

$$b_0 \in \mathbb{R} \text{ lliure, però no nul}$$

$$b_1 = \frac{-1}{(-3) \cdot 1} b_0 = \frac{b_0}{3}; \quad b_2 = \frac{1}{(-1) \cdot 2} b_1 = -\frac{b_1}{2} = -\frac{b_0}{6}; \quad b_3 = \frac{1}{1 \cdot 3} b_2 = b_2 = -\frac{b_0}{6}; \quad \dots$$

$$\Rightarrow y_2(x) = b_0 \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} + \dots \right).$$

2. (a) Resoleu el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \cos x + 2 \cos^2 x & x \in (0, \pi) \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

(b) Calculeu el límit de la solució $u(x, t)$ quan $t \rightarrow +\infty$.

Resolució: Seguimos los pasos habituales del método de separación de variables.

- Al imponer que la función $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla:
 - La ecuación del calor $u_t - u_{xx} = 0$, se obtiene que $X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición de frontera $u_x(0, t) = 0$, vemos que $X'(0) = 0$.
- La condición de frontera $u_x(\pi, t) = 0$, vemos que $X'(\pi) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$(a) \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

El problema (a) es un PVF asociado a la función $X(x)$.

- La solución del PVF asociado a la función $X(x)$ es

$$\left. \begin{array}{l} \text{VAPs: } \lambda = \lambda_n = -n^2 \\ \text{FUPs: } X(x) = X_n(x) = \cos(nx) \end{array} \right\} n \geq 0.$$

- La solución de problema (b) para $\lambda = \lambda_n = -n^2$ es $T(t) = T_n(t) = e^{-n^2 t}$, $n \geq 0$.
- Así pues, las FUPs de la parte homogénea del problema son

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad n \geq 0.$$

- La solución final $u(x, t) = \sum_{n \geq 0} a_n u_n(x, t)$ se determina imponiendo la condición no homogénea

$$1 + \cos x + \cos(2x) = \cos x + 2 \cos^2 x = u(x, 0) = \sum_{n \geq 0} a_n u_n(x, 0) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx).$$

Es decir, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ y el resto son nulos, luego la solución final es

$$u(x, t) = 1 + e^{-t} \cos x + e^{-4t} \cos(2x)$$

Finalmente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 1$.