Problemes

1. Considereu el sistema d'equacions diferencials ordinàries no lineals

$$\left.\begin{aligned} x' &= -a(x+1)y + bx^3 \\ y' &= (y+1)x + by^3 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

essent $a, b \in \mathbb{R}$ dos paràmetres.

(a) Calculeu el sistema linealitzat de (*) en el punt fix $(0,0)$ i classifiqueu-lo en funció de $a \in \mathbb{R}$.

(b) Feu un croquis de les trajectòries del sistema linealitzat per a $a = -4$.

(c) Discutiu l'estabilitat del $(0,0)$ en (*) usant el sistema linealitzat, sempre que això sigui possible.

(d) Sabent que la funció $V(x,y) = x - \ln(x+1) + a(y - \ln(y+1))$ és definida positiva en $(0,0)$ si $a > 0$, useu-la per discutir l'estabilitat del punt fix $(0,0)$ de (*), mitjançant el mètode de les funcions de Lyapunov, en funció de $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$.

Resolució:

(a) • $\left.\begin{aligned} f(x,y) &= -a(x+1)y + bx^3 \\ g(x,y) &= (y+1)x + by^3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -ay + 3bx^2 \qquad & \frac{\partial f}{\partial y} &= -a(x+1) \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= y + 1 \qquad & \frac{\partial g}{\partial y} &= x + 3by^2 \end{aligned}.$

$\Longrightarrow$ Sistema linealitzat entorn el $(0,0)$ és:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $\det A = a$, $\operatorname{tr} A = 0$, $p_A(\lambda) = \lambda^2 + a$.

$\Longrightarrow$ Valors propis: $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-a}$, per tant,

• $a > 0:$ $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{a}$, complexos conjugats de part real zero $\Longrightarrow$ centre.

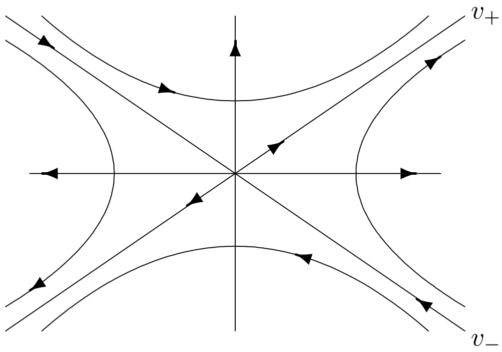
• $a = 0:$ $\lambda_\pm = 0$, sistema degenerat inestable $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• $a < 0:$ $\lambda_\pm = \pm\sqrt{|a|}$, reals de signe oposat $\Longrightarrow$ sella.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_\pm = \pm 2$, $\Longrightarrow$ sella.

• $(x,y) \in \operatorname{Ker}(A - 2Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 2y$, $v_+ = (2,1)$ vector propi de valor propi $\lambda_+ = 2$

• $(x,y) \in \operatorname{Ker}(A + 2Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2y$, $v_- = (-2,1)$ vector propi de valor propi $\lambda_- = -2$



(c) • $a \geq 0 \Rightarrow$ No podem decidir.

• $a < 0 \Rightarrow$ El $(0,0)$ és un punt fix inestable.

(d) $W(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f + \dfrac{\partial V}{\partial y} g = \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)\{-a(x+1)y + bx^3\} + a\left(1 - \dfrac{1}{y+1}\right)\{(y+1)x + by^3\} =$
$= b\left(\dfrac{x^4}{x+1} + a\dfrac{y^4}{y+1}\right) = b\widetilde{W}(x,y)$, on $\widetilde{W}(x,y) = \dfrac{x^4}{x+1} + a\dfrac{y^4}{y+1}$ és definida positiva en $(0,0)$ si $a > 0$. Llavors tenim:

• $b > 0 \Rightarrow W(x,y)$ és definida positiva en $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ és inestable.

• $b < 0 \Rightarrow W(x,y)$ és definida negativa en $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ és asimptòticament estable.

• $b = 0 \Rightarrow W(x,y) \equiv 0$ és semidefinida negativa en $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ és estable (potser no asimptòticament estable).

2. Donada l'equació diferencial ordinària

$$x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0 \qquad (**)$$

es demana:

(a) Demostreu que $x = 0$ és un punt singular regular i trobeu les arrels indicials associades.

(b) Demostreu que existeix una solució de la forma $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$ amb $a_0 = 1$ i calculeu a_1 i a_2.

(c) Calculeu el terme general de $y_1(x)$ i identifiqueu la funció.

(d) Busqueu una segona solució $y_2(x)$ de (**) independent amb $y_1(x)$ pel mètode de reducció de l'ordre.

Indicació 1: Una de les integrals no es pot calcular exactament. Abans d'integrar desenvolupeu en sèrie i quedeu-vos només amb els tres primers termes.

Indicació 2: Si no heu pogut identificar la funció $y_1(x)$ en l'apartat (c), useu els tres primers termes calculats en (b) i l'observació:

$$\frac{1}{(x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots)^2} = \frac{1}{x^4}(1 - 2a_1x + (3a_1^2 - 2a_2)x^2 + \cdots)$$

(e) Doneu la solució general de (**).

(f) Estudieu si existeix una solució analítica en $x = 0$, linealment independent amb $y_1(x)$.

Resolució:

(a) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, amb $p(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ i $q(x) = \dfrac{2}{x^2} \Longrightarrow p_0 = \lim\limits_{x\to 0} xp(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$, $q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2q(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$.

Equació indicial: $r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \Longrightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Longrightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1.$

(b) $r=2$ arrel més gran $\Rightarrow$ hi ha una solució de la forma $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$, amb $a_0=1$.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y_1''+(x^2-2x)y_1'+2y_1 = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n+(x^2-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+1}+ \\ &\quad +2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+3}- \\ &\quad -\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+2}= \\ &= \sum_{p=3}^{\infty}[p(p-1)a_{p-2}+(p-1)a_{p-3}-2p\,a_{p-2}+2a_{p-2}]x^p= \\ &= \sum_{p=3}^{\infty}[(p-1)a_{p-3}+(p^2-3p+2)a_{p-2}]x^p \end{aligned}$$

Així, $a_{p-2}=-\dfrac{p-1}{p^2-3p+2}a_{p-3}=-\dfrac{1}{p-2}a_{p-3},\ \ p\geq 3$.

Equivalentment, $a_n=-\dfrac{1}{n}a_{n-1},\ \ n\geq 1$. Així, $a_0=1$, $a_1=-\dfrac{1}{1}a_0=-1$, $a_2=-\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}$.

(c) En general $a_n=-\dfrac{1}{n}a_{n-1}=-\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{1}{n-1}\right)a_{n-2}=\cdots=$

$=\left(-\dfrac{1}{n}\right)\left(-\dfrac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{1}\right)a_0=(-1)^n\dfrac{a_0}{n!}=\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Així: $y_1(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=x^2e^{-x}$.

(d) Fórmula de reducció de l'ordre:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx=x^2e^{-x}\int\frac{e^{-\int(1-(2/x))dx}}{(x^2e^{-x})^2}dx= \\ &= x^2e^{-x}\int\frac{e^{-x+2\ln x}}{x^4e^{-2x}}dx=x^2e^{-x}\int\frac{e^x}{x^2}dx= \\ &= x^2e^{-x}\int\frac{1}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)dx= \\ &= x^2e^{-x}\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\cdots\right)dx= \\ &= x^2\left(1-x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\left(-\frac{1}{x}+\ln x+\frac{x}{2}+\cdots\right)= \\ &= \left(x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+\cdots\right)\ln x-x+x^2+\cdots \end{aligned}$$

Observació: Si només usem els primers termes de $y_1(x)=x^2-x^3+\dfrac{x^4}{2}+\cdots$ i l'observació de l'enunciat, tenim:

$$\frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}=\frac{e^{-x}x^2}{\left(x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+\cdots\right)^2}=\frac{1+2x+2x^2+\cdots}{x^2}\left(1-x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\cdots$$

i el reste de càlculs són idèntics.

(e) $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$ arbitràries.

(f) Clarament, si la solució ha de ser linealment independent amb $y_1\Rightarrow c_2\neq 0\Longrightarrow$ la solució sempre porta un terme de la forma $c_2y_1(x)\ln x$ i per tant, no pot ser mai regular en $x=0$.