Equacions Diferencials **Codi: 22701**

Temps: 1 hora 30 minuts **21 de Gener de 2005**

Problemes

1. Considereu l'equació diferencial ordinària lineal de 2n ordre:

$$y'' - \frac{1}{t}y' + \alpha(t)y = 0, \quad t > 0\,. \tag{1}$$

(a) Suposem que $y_1(t)$ és una solució de (1) coneguda ($y_1(t) \neq 0$, $\forall t$). Trobeu pel mètode de reducció de l'ordre la solució general de (1) en funció de $y_1(t)$.

(b) Determineu $y_1(t)$ de forma que $y_1^2(t)$ també sigui solució de (1).

(c) Quant val $\alpha(t)$ en aquest cas?

Resolució:

(a) Suposem que $y_1(t)$ és una solució de (1). Aplicant el mètode de reducció de l'ordre a $y_1(t)$ una segona solució linealment independent amb $y_1(t)$, és:

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{t}{y_1(t)^2} dt\,,$$

i per tant, la solució general de (1) en funció de $y_1(t)$ vé donada per

$$y_G(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_1(t) \int \frac{t}{y_1(t)^2} dt\,, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Imposant que $y_1^2(t)$ sigui també solució, resulta aleshores que existeix c_1 i $c_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$y_1^2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_1(t) \int \frac{t}{y_1^2(t)} dt\,.$$

Simplificant per $y_1(t)$ i derivant, tenim que

$$c_2 \frac{t}{y_1(t)^2} = y_1'(t)\,,$$

que és una equació diferencial ordinària d'ordre 1 de variables separades. Resolent-la, resulta aleshores que

$$y_1(t) = \left[3\left(c_2 \frac{t^2}{2} + k\right)\right]^{1/3} = (At^2 + B)^{1/3}\,.$$

(c) Substituint a (1), ens queda

$$\alpha(t) = \frac{(1/t)y_1' - y_1''}{y_1} = \frac{8}{9} A^2 t^2 (At^2 + B)^{-2}\,.$$

2. Considereu el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - x(x^2+y^2) + \mu x \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2) + \mu y \end{array} \right. . \tag{2}$$

(a) Trobeu tots els punts crítics.

(b) Trobeu el sistema linealitzat al voltant del $(0,0)$. Classifiqueu l'origen per a aquest sistema linealitzat i feu-ne el cròquis de les trajectòries.

(c) Deduïu l'estabilitat de l 'origen per al sistema no lineal (2) usant el mètode de linealització, sempre que us sigui possible.

Resolució:

(a) Imposant que

$$\left\{ \begin{array}{r} -y - x(x^2+y^2) + \mu x = 0 \\ x - y(x^2+y^2) + \mu y = 0 \end{array} \right. ,$$

tenim que $(x,y) = (0,0)$ és l'únic punt crític, per a tot μ.

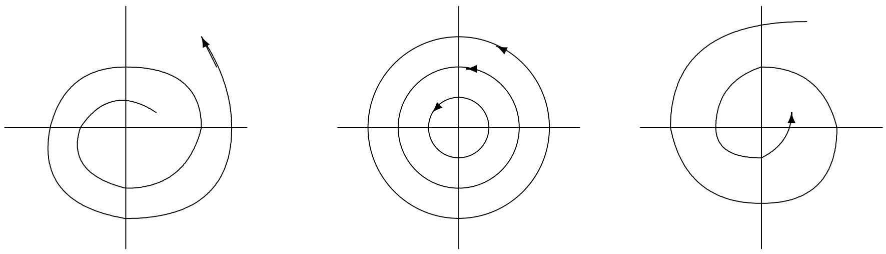
(b) El sistema linealitzat associat és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que té per valor propis $\lambda = \mu \pm i$; llavors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu > 0 \rightarrow \text{focus inestable} \\ \mu = 0 \rightarrow \text{centre (estable)} \\ \mu < 0 \rightarrow \text{focus asimptòticament estable} \end{array} \right.$$

Per determinar el sentit de gir fem $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$.



$\mu > 0$ $\qquad$ $\mu = 0$ $\qquad$ $\mu < 0$

(c) La part real dels valors propis és $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = \mu$. Per tant, pel mètode de linealització:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \mu > 0 \rightarrow \text{el } (0,0) \text{ és inestable} \\ \text{Si } \mu < 0 \rightarrow \text{el } (0,0) \text{ és asimptòticament estable} \\ \text{Si } \mu = 0 \rightarrow \text{el mètode no decideix} \end{array} \right.$$