Equacions Diferencials **Codi: 22701**

Temps: 1 hora 45 minuts 23 de Gener de 2004

Problemes

1. **(a)** Considereu l'equació diferencial ordinària

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = 0\,. \tag{1}$$

Determineu

i. L'equació característica de (1).
ii. Les arrels de l'equació característica.
iii. La solució general de (1).

(b) Considereu el sistema de primer ordre equivalent a (1)

$$Y' = AY\,. \tag{2}$$

Determineu:

i. A i el seu polinomi característic.
ii. Les arrels del polinomi característic.
iii. La solució general de (2).

(c) Relacioneu els resultats dels apartats **a** i **b**.

Resolució:

(a) i. $P_c(m):\ m^3 + m^2 + 3m - 5 = 0.$

ii. $m_1 = 1$, $m_2 = -1 + 2i$, $m_3 = -1 - 2i$.

iii. $y_G(x) = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$.

(b) i. $$\left.\begin{array}{r} y_0 = y \\ y_1 = y' \\ y_2 = y'' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_2 - 3y_1 + 5y_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_\lambda(A):\ -\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0.$

ii. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$.

iii. La matriu de Jordan de A en els complexos es pot escriure com $A_{J_{\mathbb{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & -1-2i \end{pmatrix}$.

Una matriu del canvi de base s'obté considerant

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 \in \text{Ker } (A - I), \text{ per exemple } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 \in \text{Ker } (A - (-1+2i)I), \text{ per exemple } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ -3-4i \end{pmatrix} \\ v_3 \in \text{Ker } (A - (-1-2i)I), \text{ per exemple } v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \\ -3+4i \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & -3-4i & -3+4i \end{pmatrix}.$$

Sabem aleshores que una matriu fonamental *complexa* de (2)és:

$$\Phi_{\mathbb{C}}(x) = Se^{A_{J_{\mathbb{C}}}x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & -3-4i & -3+4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-1+2i)x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-1-2i)x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & e^{(-1+2i)x} & e^{(-1-2i)x} \\ e^x & (-1+2i)e^{(-1+2i)x} & (-1-2i)e^{(-1-2i)x} \\ e^x & (-3-4i)e^{(-1+2i)x} & (-3+4i)e^{(-1-2i)x} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-x} \begin{pmatrix} e^{2x} & \cos 2x + i\sin 2x & \cos 2x - i\sin 2x \\ e^{2x} & -(\cos 2x + 2\sin 2x) + i(2\cos 2x - \sin 2x) & -(\cos 2x + 2\sin 2x) - i(2\cos 2x - \sin 2x) \\ e^{2x} & (-3\cos 2x + 4\sin 2x) - i(4\cos 2x + 3\sin 2x) & (-3\cos 2x + 4\sin 2x) + i(4\cos 2x + 3\sin 2x) \end{pmatrix}$$

per la qual cosa una matriu fonamental *real* de (2) és

$$\Phi_{\mathbb{R}}(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} e^{2x} & \cos 2x & \sin 2x \\ e^{2x} & -(\cos 2x + 2\sin 2x) & (2\cos 2x - \sin 2x) \\ e^{2x} & -3\cos 2x + 4\sin 2x & 4\cos 2x + 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

d'on la solució general ve donada per

$$Y_G(x) = \begin{pmatrix} e^x c_1 + e^{-x}(c_2\cos 2x + c_3 \sin 2x) \\ e^x c_1 + e^{-x}(-c_2(\cos 2x + 2\sin 2x) + c_3(2\cos 2x - \sin 2x)) \\ e^x c_1 + e^{-x}(c_2(-3\cos 2x + 4\sin 2x) + c_3(4\cos 2x + 3\sin 2x)) \end{pmatrix}.$$

(c) Podem observar que $P_c(m) = -P_\lambda(A)$ i que $m_i = \lambda_i$, $i = 1,2,3$, degut a que (1) i (2) són problemes equivalents.

D'altra banda sabem que, a més, y_G serà solució general de (1) si, i només si, $\begin{pmatrix} y_G(x) \\ y'_G(x) \\ y''_G(x) \end{pmatrix}$ és la solució general de (2) i podem comprovar que efectivament les solucions de (a.iii) i (b.iii) es corresponen segons aquesta regla.

2. (a) Trobeu, segons els valors de λ, totes les solucions no trivials del problema de valors a la frontera:

$$\begin{cases} X'' + 2X' = \lambda X \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

(b) Useu el resultat anterior per resoldre el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0 \\ u(x,0) = e^{-x}\sin(4x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Resolució:

(a) El polinomi característic de l'equació diferencial ordinària és $m^2+2m-\lambda = 0 \Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$. Aleshores:

- Si $\lambda > -1 \Rightarrow X(x) = c_1 \exp[(-1+\sqrt{1+\lambda})x] + c_1 \exp[(-1-\sqrt{1+\lambda})x]$ i imposant que $X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow$ no val.
- Si $\lambda = -1 \Rightarrow X(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$ i imposant que $X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow$ no val.

- Si $\lambda < -1 \Rightarrow X(x) = e^{-x}[c_1 \cos(\sqrt{-\lambda - 1}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda - 1}x)]$ i imposant que $X(0) = X(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \quad c_1 = 0 = c_2 \Rightarrow \text{no val} \\ \text{i} \\ \quad c_1 = 0 \quad \text{i} \quad \sin\sqrt{-\lambda - 1}\pi = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow c_1 = 0$ i $\sqrt{-\lambda - 1} = n,\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Per tant, només tenim solucions no trivials si $\lambda_n = -(n^2 + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ i en aquest cas $X_n(x) = c_2 e^{-x} \sin nx$.

(b) *(1r pas)* Considerem el subsistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{array} \right. \tag{3'}$$

i busquem solucions del tipus $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} T'X - X''T - 2X'T = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X'' + 2X'}{X} = \lambda \in \mathbb{R} \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right.$, pel que fent servir l'apartat (a), les solucions del tipus buscat són

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_1 e^{-x} \sin nx e^{-(n^2+1)t}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 1\,.$$

(2n pas) Considerem la solució de (3) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x} \sin nx e^{-(n^2+1)t} \tag{4}$$

Per linealitat $u(x,t)$ és solució (formal) de (3'), per tant, perquè sigui solució de (3) només cal comprovar que se satisfà la condició inicial

$$u(x,0) = e^{-x} \sin(4x)\,.$$

Haurà de complir-se doncs que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-x} \sin nx = e^{-x} \sin 4x$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \quad A_n = 0\,, \forall\, n \geq 1,\ n \in \mathbb{N} \text{ i } n \neq 4 \\ \text{i} \\ \quad A_4 = 1 \end{array} \right.$$

Finalment, substituint en (4): $\quad u(x,t) = e^{-x} \sin 4x e^{-17t}$.