

# Programa y Problemas de Ecuaciones Diferenciales

Equipo docente de Ecuaciones Diferenciales

(<http://www.ma1.upc.edu/~edis/>)

VERSIÓN 2.3 : 28 de junio de 2010.

Copyright ©Departamento de Matemática Aplicada 1 (MA1)

La reproducción total o parcial de esta colección, sin modificaciones, está permitida por cualquier procedimiento, incluyendo la reprografía y el tratamiento informático, siempre y cuando consten los datos del original, se haga sin ánimo de lucro y se siga este mismo criterio de distribución.

Si se distribuyen partes de esta colección, se deben incluir instrucciones sobre cómo obtener la versión completa.

Cualquier traducción o trabajo derivado de esta obra tiene que ser aprobado por los autores antes de su distribución.

Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB)

Departamento de Matemática Aplicada 1 (MA1)

Rafael Ramírez Ros (RRR)

Diagonal 647

08028 Barcelona (España)

mail: [rafael.ramirez@upc.edu](mailto:rafael.ramirez@upc.edu)

web: <http://www.ma1.upc.edu/~edis/>

## Índice general

Prefacio	v
Material multimedia	vii
Programa	ix
Intro	1
Ecuaciones Lineales	3
Sistemas Lineales	15
Sistemas No Lineales	25
Modelos	31
EDPs	41



## Prefacio

Este material ha sido preparado por los profesores del Departamento de Matemática Aplicada 1 (<http://www.ma1.upc.edu/>) que han trabajado durante los últimos cuatrimestres en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales* de la titulación de Ingeniería Industrial impartida en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (<http://www.etseib.upc.edu/>) de la Universidad Politécnica de Cataluña (<http://www.upc.edu/>). En estas páginas hay unos 130 problemas y más de la mitad se han extraído de antiguos exámenes. Así el estudiante sabrá qué nivel se espera de él.

Cada problema va precedido de un descriptor. El descriptor de los problemas adaptados de exámenes anteriores es la fecha del examen, lo cual es útil pues hemos colgado la resolución de los últimos exámenes en la página web de la asignatura:

<http://www.ma1.upc.edu/~edis/>

El descriptor de los otros enfatiza el concepto principal que cada problema trata.

Muchos problemas van seguidos de su solución, pero se recomienda intentar resolverlos antes de mirar las respuestas. Para facilitar eso, existe una versión de esta recopilación sin las soluciones. De cara a uniformizar la recopilación, se han adoptado las notaciones usadas en unos apuntes que se pueden descargar de la página web de la asignatura antes mencionada.

El recopilador espera que este trabajo resulte útil y no contenga demasiados errores. Cualquier comentario constructivo será bienvenido.

Rafael Ramírez Ros  
Barcelona, a 28 de junio de 2010

*Aprende a resolver todos los problemas que ya hayan sido resueltos. (Richard Feynman)*

*Me lo contaron y lo olvidé. Lo vi y lo entendí. Lo hice y lo aprendí. (Confucio)*

*Vale más saber algo acerca de todo que saberlo todo acerca de una sola cosa. (Blaise Pascal)*

*Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes. (Isaac Newton)*

*Es más fácil saber como se hace una cosa que hacerla. (Proverbio chino)*

*Quien pregunta es ignorante cinco minutos; quien no, lo será siempre. (Proverbio chino)*

*Si tiene solución, ¿por qué te preocupas? Y si no, ¿por qué preocuparse? (Proverbio chino)*

*Si vas a creer todo lo que lees, mejor no leas. (Proverbio japonés)*

*Empezar es la mitad de todo. (Proverbio griego)*

*El que nada duda, nada sabe. (Proverbio griego)*

*Errar es humano. (Proverbio romano)*



## Material multimedia

Hoy en día se puede encontrar una gran cantidad de materiales multimedia gratuitos y abiertos. Videos de Youtube, entradas de Wikipedia, applets de JAVA, problemas resueltos, libros electrónicos, apuntes escaneados, clases en video, software especializado de cálculo simbólico o numérico, etc.

Cuando sea conveniente se utilizarán esos materiales en clase. De momento, y para ir abriendo boca, aquí teneis una lista. Podeis echarles un vistazo en vuestro tiempo libre.

- *Libros y apuntes electrónicos:*
  - En <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx> está el libro *Differential Equations* de Paul Dawkins. Cubre los temas de Ecuaciones Lineales, Sistemas Lineales y Ecuaciones en Derivadas Parciales. Muy bien escrito. Quizá el mejor de esta lista. En la web de Paul Dawkins podeis encontrar otros documentos como *How To Study Mathematics* o *Common Math Errors*. ¡Este último documento es una prueba de que en todas partes los estudiantes cometen los mismos errores!
  - En <http://www.ugr.es/~rortega/M4.htm> podeis encontrar los apuntes escaneados de Rafael Ortega. Sus lecciones 1, 5 y 6 se intersecan con nuestros temas de Introducción y Ecuaciones Lineales. Probablemente el material más pedagógico de la lista.
  - En el enlace <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/dn.pdf> hay un documento titulado *Notes on Differential Equations* de Bob Terrell. Son unas 200 páginas que cubren casi todo nuestro curso. El documento con mejores gráficos de la lista.
  - En la dirección <http://people.cs.uchicago.edu/~lebovitz/odesbook.html> podeis descargar una versión inacabada de un libro de Norman Lebovitz, aunque quizá es demasiado abstracto para nuestros intereses.
- *Applets en JAVA para visualizar fenómenos físicos:*
  - En <http://www-math.mit.edu/daimp/> el profesor Hubert Hohnm del Massachusetts Institute of Technology (MIT) explica varios fenómenos de resonancias, la fórmula de D'Alembert para la cuerda vibrante infinita, el estado estacionario de la ecuación de calor 1D con condiciones de Dirichlet, etc. Son muy buenos. Os reto a que os conecteis, escojais uno al azar e intentéis dilucidar que ayuda a explicar.
  - En <http://www.walter-fendt.de/ph14s/> Walter Fendt tiene más de cuarenta. Por ejemplo, en el tema de *Modelos* veremos uno sobre la desintegración radioactiva. La parte de oscilaciones está bien representada. Traducidos al castellano.
  - En <http://www.falstad.com/mathphysics.html> Paul Falstad tiene una colección de applets sobre temas matemáticos y físicos que consultaremos en la última parte del curso. Entre otras cosas, simula el movimiento de una membrana elástica (es decir, la ecuación de ondas 2D) de formas rectangular o circular. En el caso circular, que simula un tambor, hasta se puede oír el sonido creado.
- *Wikipedia.* ¿Qué se puede decir? Gargantuesca y pantagruélica. El primer lugar por donde empezar a resolver cualquier duda. Pero, cuidado, no debe ser el último. Mejor la versión inglesa. Algunas entradas que consultaremos son: *Airbus A380*, *Bussard ramjet*, *solar sail*, *Beat (acoustics)*, *Lorenz attractor*, *standing wave*, *normal mode*, etc.
- *Clases en video:*

- El Massachusetts Institute of Technology (MIT), uno de los centros de investigación más prestigiosos del mundo, ha colgado en su web las clases del profesor Arthur Mattuck en video. Advertencia: El temario presenta diferencias y Mattuck habla en inglés.
- Salman Khan ha grabado más de 1400 miniclasas que cubren muchos de los conceptos matemáticos que os encontrareis a lo largo de la carrera. Son videos en los que Salman escribe “a mano” usando un tableta gráfica sobre fondo negro mientras explica que está haciendo. Ver <http://www.khanacademy.org/>, también en inglés.
- *Videos de Youtube.* Si poneis en el buscador del sitio Youtube las palabras clave adecuadas, encontrareis videos divulgativos interesantes. Probad, por ejemplo, con las siguientes palabras clave: **Tacoma Narrows bridge** (colapso de un puente por resonancia mecánica), **ground resonance** (destrucción de helicópteros por fenómenos de resonancia), **Wilberforce pendulum** (conversión de movimiento longitudinal en movimiento torsional), **standing wave** (experimento para mostrar los modos normales de vibración de una cuerda), **resonance rice** (visualización de patrones de resonancia usando granos de arroz), **Walter Levin promo** (Levin es el más famoso profesor de física de USA, del MIT como no, tres mil visitas diarias a sus videos), **réaction oscillante** (ejemplo en tiempo real de la reacción oscilante de Briggs-Rauscher), etc.
- *Google.* Es tu aliado. Por ejemplo, si estudiamos la difusión de contaminantes en los Grandes Lagos y sabemos que se puede modelar mediante ecuaciones diferenciales, introducimos las palabras clave **great lakes differential equations** y voilà!
- *MATLAB.* Es un software comercial especializado en el cálculo matemático de tipo simbólico y numérico. Instalado en todos los ordenadores de la ETSEIB. Útil para comprobar que no has cometido ningún error al resolver aquel problema repleto de cálculos tediosos.

Un advertencia final. Que no os deslumbre la técnica moderna. La parte más importante del curso sigue consistiendo en rascar papel con un lápiz. Y así son los exámenes.

# Programa

En cada cuatrimestre se decide cuales de los items marcados con (\*) forman parte del programa.

1. **Introducción** [3 clases puramente teóricas en los grupos de teoría]
  - Definiciones.
  - Campos de vectores.
  - Problemas de valor inicial (PVI).
  - Dos teoremas de existencia y unicidad.
2. **Ecuaciones Lineales** [13–16 clases teóricas y prácticas en los grupos de problemas]
  - a) *Estructura de las Soluciones* [2 clases]
    - PVI lineales.
    - Linealidad.
    - Conjunto fundamental de soluciones.
    - Wronskiano, fórmula de Liouville e independencia lineal.
  - b) *Ecuaciones Lineales a Coeficientes Variables* [2 clases]
    - El método de reducción de orden para ecuaciones homogéneas.
    - El método de variación de parámetros para ecuaciones no homogéneas.
  - c) *Ecuaciones Lineales a Coeficientes Constantes* [3–4 clases]
    - El método del polinomio característico para ecuaciones homogéneas.
    - El método de coeficientes indeterminados para ecuaciones no homogéneas.
    - Ecuaciones de Cauchy-Euler (\*).
  - d) *Problemas de Valor en la Frontera* [2–3 clases]
    - Existencia y unicidad, existencia sin unicidad y no existencia de soluciones.
    - PVF con parámetros. VAPs y FUPs.
  - e) *Oscilaciones* [4–5 clases]
    - Funciones periódicas y cuasiperiódicas.
    - Oscilaciones armónicas: forma amplitud-fase.
    - Oscilaciones libres (sub, sobre y críticamente) amortiguadas.
    - Oscilaciones forzadas no amortiguadas: soluciones periódicas y resonancia.
    - Oscilaciones forzadas amortiguadas: factor de amplificación y curvas de respuesta.
3. **Sistemas Lineales** [9–10 clases en los grupos de teoría y 4 en los grupos de problemas]
  - a) *Estructura de las Soluciones* [3 clases en los grupos de teoría]
    - PVI lineales.
    - Linealidad.
    - Conjunto fundamental de soluciones.
    - Wronskiano, fórmula de Liouville e independencia lineal.
    - Matrices fundamentales y matriz principal.

- Fórmula de variación de parámetros.
  - b) *SLs Homogéneas a Coeficientes Constantes [2 clases en los grupos de teoría]*
    - El caso diagonalizable real.
    - El caso diagonalizable complejo.
    - El caso general. Exponencial de una matriz y forma de Jordan.
    - La forma de Jordan real para sistemas 2D.
  - c) *Estabilidad de SLs a Coeficientes Constantes [1–2 clases en los grupos de teoría]*
    - Sistemas inestables, estables y asintóticamente estables.
    - El teorema general.
    - El criterio traza-determinante para sistemas 2D.
  - d) *Clasificación de SLs Homogéneas a Coeficientes Cts [3 clases en los grupos de teoría]*
    - Clasificación de sistemas 2D: sillars, centros, focos, nodos y sistemas degenerados.
    - Croquis de sistemas 2D: direcciones de entrada y salida, direcciones rápidas y lentas, rectas de puntos de equilibrio, sentido de giro, etc.
    - El criterio traza-determinante para sistemas 2D.
    - Algunos comentarios sobre sistemas 3D.
- 4. **Sistemas No Lineales [4–5 clases en los grupos de teoría y 3 en los grupos de problemas]**
  - Puntos de equilibrio inestables, estables y asintóticamente estables.
  - El retrato de fases de SNLs 1D. La ecuación logística.
  - Estabilidad de puntos de equilibrio por linealización. Sillas, focos y nodos no lineales.
  - Estabilidad de puntos de equilibrio por el método de Liapounov. Centros no lineales.
  - El retrato de fases del péndulo sin fricción (\*).
- 5. **Modelos [3–5 clases puramente prácticas, en los grupos de problemas]**
  - EDOs lineales de primer orden: compuestos granulares, desintegración radioactiva, Airbus A380, depósito de salmuera, modelo de Malthus, etc.
  - EDOs lineales de orden superior: principio de Arquímedes, muelle vertical, etc.
  - EDOs no lineales: la ecuación logística, estatocolector estelar, vela solar, la ecuación del paracaidista, cuerpo cayendo en un fluido, el péndulo, reacción química simple, etc.
  - SLs: el péndulo de Wilberforce, contaminación en los Grandes Lagos, etc. (\*)
  - SNLs: reacción química triple, modelo depredador-presa, pescando platelmintos, dos especies competitivas, etc. (\*)
- 6. **Ecuaciones en Derivadas Parciales [10–11 clases teórico-prácticas en los grupos de teoría]**
  - Las tres ecuaciones básicas: ondas, Laplace/Poisson y calor.
  - Condiciones iniciales: posición, velocidad y temperatura.
  - Condiciones de frontera: Dirichlet (valor fijo) y Neumann (flujo fijo).
  - Algunas leyes de conservación para la ecuaciones de ondas 1D y calor 1D.
  - Linealidad: superposición, homogeneización y unicidad.
  - Fórmula de D'Alembert para la cuerda vibrante infinita. Superposición de ondas.
  - Separación de variables en la ecuación de ondas 1D.
  - Separación de variables en la ecuación del calor 1D. Temperaturas límite.
  - Separación de variables en la ecuación de Poisson 2D en dominios rectangulares.
  - Principio del máximo y mínimo para la ecuación del calor. Unicidad de soluciones (\*).
  - Principio del máximo y mínimo para la ecuación de Poisson. Unicidad de soluciones (\*).

## Intro

1. (Ecuación 1D no autónoma, Pb5 Octubre 2008) Sea  $x(t)$  la solución del PVI

$$x' = (t - x)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

¿Para qué condiciones iniciales  $(t_0, x_0)$  es constante la función  $x(t)$ ; es decir,  $x(t) \equiv x_0$ ? Una vez descartados esos casos degenerados, ¿Para qué otras condiciones iniciales tiene  $x(t)$  un máximo local en  $t = t_0$ ? ¿Y un mínimo?

*La función constante  $x(t) \equiv x_0$  cumple la EDO si y sólo si  $x_0 = 0$ . A partir de ahora suponemos que  $x_0 \neq 0$ . Notamos que  $x'(t_0) = (t_0 - x(t_0))x(t_0) = (t_0 - x_0)x_0$  y*

$$x''(t_0) = (t_0 - x(t_0))x'(t_0) + (1 - x'(t_0))x(t_0) = (t_0 - x_0)^2 x_0 - (t_0 - x_0)x_0^2 + x_0.$$

*Por tanto,*

- Si  $x_0 = t_0 > 0$ , entonces  $x'(t_0) = 0$ ,  $x''(t_0) = x_0 > 0$  y  $x(t)$  tiene un mínimo local en  $t = t_0$ .
- Si  $x_0 = t_0 < 0$ , entonces  $x'(t_0) = 0$ ,  $x''(t_0) = x_0 < 0$  y  $x(t)$  tiene un máximo local en  $t = t_0$ .

2. (Pb1 Noviembre 2009) Sean  $x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las únicas soluciones del PVI

$$\begin{cases} x' = yz & x(0) = 0 \\ y' = -xz & y(0) = 1 \\ z' = -xy & z(0) = 1 \end{cases} .$$

¿Tiene alguna de esas tres funciones un mínimo en  $t = 0$ ? ¿Y un máximo?

*En primer lugar, evaluamos las primeras derivadas usando el sistema de EDOs:*

$$x'(0) = y(0)z(0) = 1 \neq 0, \quad y'(0) = -x(0)z(0) = 0, \quad z'(0) = -x(0)y(0) = 0.$$

*Así pues, la función  $x(t)$  no tiene un punto crítico en  $t = 0$ . Derivamos el sistema de EDOs para calcular las segundas derivadas de las funciones que tienen un punto crítico en  $t = 0$ .*

$$y''(0) = -x'(0)z(0) - x(0)z'(0) = -1 < 0, \quad z''(0) = -x'(0)y(0) - x(0)y'(0) = -1 < 0.$$

*Luego  $x(t)$  es creciente en  $t = 0$ ,  $y(t)$  tiene un máximo en  $t = 0$  y  $z(t)$  tiene un máximo en  $t = 0$ .*

3. (Teoría Enero 2009) ¿Qué es el campo de vectores asociado a un sistema autónomo de primer orden en forma normal? ¿Qué relación existe entre el campo de vectores y las trayectorias del sistema? Sea  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ .

- a) ¿Qué relación existe entre las trayectorias de los sistemas  $X' = F(X)$  y  $X' = -F(X)$ ?
- b) ¿Qué relación existe entre las trayectorias de los sistemas  $X' = F(X)$  y  $X' = 2F(X)$ ?

*Consiste en asignar a cada punto  $X \in D$  un vector con origen en dicho punto y dirección  $F(X)$ , de forma que todas las trayectorias del sistema son tangentes al campo de vectores así obtenido.*

- a) *Son las mismas trayectorias, pero recorridas en sentido contrario.*
- b) *Son las mismas trayectorias recorridas en el mismo sentido, pero a distinta velocidad.*

4. (Pb5 Abril 2009) Consideramos el campo de vectores asociado al sistema de primer orden

$$\begin{cases} x' &= x(1-y) \\ y' &= y(x-1) \end{cases}.$$

¿En qué puntos es horizontal el campo de vectores? ¿Y vertical? Sabiendo que todas las trayectorias contenidas en el primer cuadrante dan vueltas alrededor del punto  $(1, 1)$ , decir si esas trayectorias giran en sentido horario o antihorario.

“Plantamos” en cada punto  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  el vector velocidad  $\vec{v}_0 = (x'_0, y'_0)$  dado por

$$x'_0 = x_0(1 - y_0), \quad y'_0 = y_0(x_0 - 1).$$

Por tanto, los puntos con velocidad horizontal están situados sobre el eje horizontal  $\{y = 0\}$  o la recta vertical  $\{x = 1\}$ , mientras que los puntos con velocidad vertical están situados sobre el eje vertical  $\{x = 0\}$  o la recta horizontal  $\{y = 1\}$ . El sentido de giro se determina mediante el campo de vectores. Si  $(x_0, y_0)$  es un punto del primer cuadrante situado por debajo del punto  $(1, 1)$  —es decir,  $x_0 > 0$  y  $0 < y_0 < 1$ —, su velocidad  $\vec{v}_0$  apunta hacia la derecha, pues  $x'_0 = x_0(1 - y_0) > 0$ . En cambio, cuando está por encima del punto  $(1, 1)$ , su velocidad apunta a la izquierda. Esto implica que las trayectorias del primer cuadrante giran en sentido antihorario alrededor del punto  $(1, 1)$ .

5. (Pb1 Abril 2010) Consideramos las trayectorias del sistema no lineal 2D

$$\left. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= (1 - x^2)y - x \end{aligned} \right\}.$$

- Viendo que la velocidad en el origen es nula, ¿puede pasar una trayectoria por el origen sin quedarse allí? ¿Por qué?
- Si la trayectoria parte de un punto de la recta  $x = 1$ , ¿inicialmente se mueve hacia arriba o hacia abajo?
- Describir el lugar geométrico de los puntos  $(x, y)$  en los cuales el módulo de la velocidad de la trayectoria coincide con la distancia al origen.

a) No. La trayectoria  $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$  es una solución del sistema, luego no puede existir otra solución que pase por el origen debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones.

b) Si  $x = 1$ , entonces  $y' = -1 < 0$ , luego trayectoria inicialmente se mueve hacia abajo.

c) El módulo de la velocidad en  $(x, y)$  es  $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + y(1 - x^2)((1 - x^2)y - 2x)}$ . La distancia del punto  $(x, y)$  al origen es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Por tanto, hemos de resolver la ecuación

$$y(1 - x^2)((1 - x^2)y - 2x) = 0.$$

El lugar geométrico de los puntos que cumplen la ecuación anterior está formado por la recta horizontal  $y = 0$ , las dos rectas verticales  $x = \pm 1$  y la gráfica de la función  $y = 2x/(1 - x^2)$ .

## Ecuaciones Lineales

1. (Conjunto fundamental de soluciones) Probar que  $x_1(t) = \cos(\ln t)$  y  $x_2(t) = \sin(\ln t)$  forman un conjunto fundamental de soluciones de la EDO lineal homogénea  $t^2 x'' + tx' + x = 0$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

*Basta comprobar que las funciones cumplen la EDO y que su Wronskiano es no nulo.*

2. (Fórmula de Liouville, Pb3 Octubre 2008) Sean  $W_+(t)$  y  $W_-(t)$  los Wronskianos de un conjunto fundamental de las EDOs lineales homogéneas  $tx''' \pm x'' + \sqrt{t}x' + t^2x = 0$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ . Calcularlos sabiendo que  $W_{\pm}(2) = 3$ .

$$W_+(t) = 6/t \text{ y } W_-(t) = 3t/2.$$

3. (Pb4 Noviembre 2009) Consideramos la EDO lineal no homogénea de segundo orden

$$(2t + 3)tx'' + 2(2t^2 - 3)x' - 12(t + 1)x = (2t + 3)^2.$$

- a) La EDO homogénea asociada tiene una solución exponencial de la forma  $e^{\lambda t}$ . Calcularla.  
 b) La EDO homogénea asociada tiene una solución monomial de la forma  $t^m$ . Calcularla.  
 c) La EDO original tiene una solución polinomial de la forma  $at + b$ . Calcularla.  
 d) Resolver el PVI

$$\begin{cases} (2t + 3)tx'' + 2(2t^2 - 3)x' - 12(t + 1)x = (2t + 3)^2, \\ x(-1) = -1, \\ x'(-1) = 5/2. \end{cases}$$

- e) Estudiar la existencia y unicidad de soluciones del PVI

$$\begin{cases} (2t + 3)tx'' + 2(2t^2 - 3)x' - 12(t + 1)x = (2t + 3)^2, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

en función del valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- f) Los resultados del apartado anterior no entran en contradicción con el Teorema de Existencia y Unicidad para EDOs lineales. ¿Por qué?

$\lambda = -2$ ,  $m = 3$  y  $a = b = -1/2$ , luego la solución general es  $x_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t^3 - (t + 1)/2$ , con  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  libres. Al imponer que cumpla las c. i.  $x(-1) = -1$  y  $x'(-1) = 5/2$  vemos que  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 1$  (unicidad de soluciones del PVI en  $t = -1$ ). En cambio, al imponer que cumpla las c. i.  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = 0$ , vemos que  $x_0 = -3/4$ ,  $c_1 = -1/4$  y  $c_2$  queda libre. Por tanto, el PVI en  $t = 0$  tiene infinitas soluciones cuando  $x_0 = -3/4$  y no tiene ninguna de lo contrario. No existe contradicción alguna, pues la EDO es singular en  $t = 0$ .

4. (Método de variación de parámetros) Sabiendo que las funciones  $x_1(t) = t$  y  $x_2(t) = t \ln t$  forman un conjunto fundamental de soluciones de la EDO lineal homogénea  $t^2 x'' - tx' + x = 0$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ , resolver la EDO lineal no homogénea  $t^2 x'' - tx' + x = 4t \ln t$ .

La solución general es  $x_g(t) = c_1 t + c_2 t \ln t + \frac{2}{3} t \ln^3 t$ .

5. (Método de reducción del orden) Resolver la EDO lineal

$$tx'' - 2(1+t)x' + (t+2)x = t + t^2.$$

sabiendo que  $x_1(t) = e^t$  es una solución de la EDO homogénea asociada.

La solución general es  $x_g(t) = e^t(c_1 + c_2 t^3) + 1 + t$ .

6. (Test Marzo 2007, generalizado) Fijado un entero  $n \geq 1$ , encontrar una EDO lineal homogénea del menor orden posible que tenga entre sus soluciones a las funciones  $x_1(t) = t^n$  y  $x_2(t) = e^t$ . A continuación, encontrar una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes del menor orden posible que cumpla la misma propiedad. ¿Son únicas?

Esas funciones son li, luego se necesita una EDO de segundo orden; por ejemplo

$$(t-n)tx'' + (n^2 - t^2 - n)x' + n(t+1-n)x = 0.$$

Cuando restringimos la búsqueda a EDOs a coeficientes constantes, necesitamos una EDO de orden mayor:  $x^{(n+2)} - x^{(n+1)} = 0$ . Ambas EDOs son únicas salvo factores multiplicativos.

7. (EDOs lineales a coeficientes constantes con MATLAB) Usar el comando `dsolve` de MATLAB para resolver simbólicamente los problemas:

a)  $x''' - x'' + x' - x = te^t \sin t$ .

b)  $2x^{(5)} - 7x^{(4)} + 12x''' + 8x'' = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ,  $x'''(0) = x^{(4)}(0) = 1$ .

a) El comando `dsolve('D3x-D2x+Dx-x=t*exp(t)*sin(t)')` da la solución general

$$x_g(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - e^t (8 \cos t + 5t \cos t - 19 \sin t + 10t \sin t) / 25.$$

b) Obtenemos la solución  $x(t) = 19/16 - 5t/8 - 48e^{-t/2}/41 + e^{2t}(24 \sin(2t) - 11 \cos(2t))/656$  con los comandos

```
>> edo='2*D5x-7*D4x+12*D3x+8*D2x=0';
```

```
>> ci='x(0)=0,Dx(0)=0,D2x(0)=0,D3x(0)=1,D4x(0)=1';
```

```
>> dsolve(edo,ci)
```

8. (EDOs lineales homogéneas a coeficientes constantes) Resolver:

a)  $x''' - 8x = 0$ .

b)  $x^{(5)} + 8x''' + 16x' = 0$ .

c)  $x^{(8)} - x = 0$ .

Las soluciones generales de estas ecuaciones son:

a)  $x_h(t) = c_1 e^{2t} + e^{-t}(c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \sin(\sqrt{3}t))$ .

b)  $x_h(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 t \cos(2t) + c_5 t \sin(2t)$ .

c)  $x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + e^{t/\sqrt{2}}(c_5 \cos(t/\sqrt{2}) + c_6 \sin(t/\sqrt{2})) + e^{-t/\sqrt{2}}(c_7 \cos(t/\sqrt{2}) + c_8 \sin(t/\sqrt{2}))$ .

9. (Fórmula de Taylor) Resolver el PVI:  $x^{(n+1)} = 0$ ,  $x^{(j)}(0) = x_j$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

La solución es el polinomio  $x(t) = \sum_{j=0}^n x_j t^j / j!$ .

10. (Parcial Abril 2008) Tenemos una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes cuyo polinomio característico es  $P(m) = (m^2 - 4)(m^2 + 9)(m^2 + 2m + 2)m$ .

a) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones? Escribir la solución general de la ecuación.

- b) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones periódicas? ¿Qué periodo tienen?
- c) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas las soluciones que tienden a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ ? ¿Y cuando  $t \rightarrow -\infty$ ? ¿Y cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ?

La EDO tiene orden siete, pues  $\text{gr}[P(m)] = 7$ .

- a) Siete.  $x_g(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos(3t) + c_4 \sin(3t) + e^{-t}(c_5 \cos t + c_6 \sin t) + c_7$ .
- b) Tres, pues necesitamos que  $c_1 = c_2 = c_5 = c_6 = 0$ . El periodo es  $T = 2\pi/3$ .
- c) Tres, pues necesitamos que  $c_1 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$ . Uno, pues  $c_1$  es la única constante que puede ser no nula. Cero, pues todas las constantes deben ser nulas.

11. (EDOs lineales no homogéneas a coeficientes constantes) Resolver:

- a)  $2x'' + 2x' + 3x = t^2 + 2t + 1$ .
- b)  $x'' + 3x' - 4x = \sin 2t$ .
- c)  $x'' + 4x = \sin 2t$ .
- d)  $x''' - 2x'' - 5x' + 6x = e^{4t}$ .
- e)  $x''' + 2x'' + 9x' + 18x = 13e^{-2t}$ .

¿Cuáles son resonantes?

Las únicas ecuaciones resonantes son c) y e).

- a)  $x_g(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos(\sqrt{5}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{5}t/2)) - \frac{7}{27} + \frac{2}{9}t + \frac{1}{3}t^2$ .
- b)  $x_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t} - \frac{3}{50} \cos 2t - \frac{2}{25} \sin 2t$ .
- c)  $x_g(t) = (c_1 - t/4) \cos 2t + c_2 \sin 2t$ .
- d)  $x_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{18} e^{4t}$ .
- e)  $x_g(t) = (c_1 + t)e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$ .

12. (PVLs lineales no homogéneos a coeficientes constantes) Resolver:

- a)  $x''' - 4x' = \cos^2 t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 1$ .
- b)  $x'' + 2x' + x = te^{-t}$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ .

Las soluciones son:

- a)  $x(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}t + \frac{11}{64}e^{2t} + \frac{5}{64}e^{-2t} - \frac{1}{32} \sin 2t$ . Hemos usado que  $2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$ .
- b)  $x(t) = e^{-t}(1 + 3t + t^3/6)$ .

13. (EDOs lineales no homogéneas por variación de parámetros) Resolver:

- a)  $x''' - 2x'' - x' + 2x = \cos t$ .
- b)  $x''' - x' = te^t$ .

Las soluciones generales son:

- a)  $x_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{5} \cos t - \frac{1}{10} \sin t$ .
- b)  $x_g(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + e^t(t^2 - 3t)/4$ .

14. (Pb1 Octubre 2008) Probar que la EDO  $x''' - x = \cos t$  tiene una única solución periódica. Calcularla.

La solución general de la EDO es

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 e^t + e^{-t/2}(c_2 \cos \sqrt{3}t/2 + c_3 \sin \sqrt{3}t/2) - (\cos t + \sin t)/2.$$

Tomando  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , queda que  $x(t) = -(\cos t + \sin t)/2$  es la única solución periódica.

15. (Pb2 Abril 2009) Consideramos la EDO lineal no homogénea  $x^{(4)} - x = 45 \sin(2t)$ .

- a) Calcular su solución general.

- b) Si  $x(t)$  es su solución determinada por las condiciones iniciales  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ , ¿cuál es el menor valor de  $n \geq 4$  tal que  $x^{(n)}(0) \neq 0$ ? ¿Qué valor tiene esa primera derivada no nula?
- c) Calcular todas sus soluciones periódicas. ¿Tienen el mismo periodo? En caso afirmativo, dar el periodo común. En caso negativo, dar el periodo de cada solución.

- a)  $x_g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3 \sin(2t)$ , con  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  libres.
- b)  $x^{(4)}(t) = 45 \sin(2t) + x(t)$ , luego  $x^{(4)}(0) = 0 + x(0) = 0$ . Derivando la expresión anterior, vemos que  $x^{(5)}(t) = 90 \cos(2t) + x'(t)$ , luego  $x^{(5)}(0) = 90 + x'(0) = 90 \neq 0$ .
- c) Las frecuencias  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = 2$  son resonantes, luego tomando  $c_1 = c_2 = 0$ , queda  $x(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3 \sin(2t)$ , con  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  libres. que son todas las soluciones periódicas de la EDO. La solución particular  $x_p(t) = 3 \sin(2t)$  tiene periodo  $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \pi$ , todas las demás tienen periodo  $T = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \text{m.c.m.}[2\pi, \pi] = 2\pi$ .

16. (Ecuaciones de Cauchy-Euler por monomios) Buscar soluciones monomiales  $x(t) = t^m$  de las ecuaciones homogéneas asociadas para resolver:

- a) La EDO homogénea  $t^3 x''' + 5t^2 x'' + 7t x' + 8x = 0$ .
- b) La EDO no homogénea  $t^2 x'' - 3t x' + 3x = 2t^4 e^t$ .
- c) El PVI homogéneo  $t^2 x'' + t x' + x = 0$ ,  $x(1) = 1$  y  $x'(1) = 2$ .

- a)  $x_h(t) = c_1 t^{-2} + c_2 \cos(2 \ln t) + c_3 \sin(2 \ln t)$ .
- b)  $x_g(t) = c_1 t + c_2 t^3 + 2t(t-1)e^t$ . (Solución particular calculada por variación de parámetros.)
- c)  $x(t) = \cos(\ln t) + 2 \sin(\ln t)$ .

17. (Ecuaciones de Cauchy-Euler por cambio de variable) Comprobar que el cambio de variable independiente  $t = e^s$  transforma la ecuación de Cauchy-Euler

$$at^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + bt \frac{dx}{dt} + cx = h(t), \quad t > 0$$

en la ecuación lineal a coeficientes constantes

$$a \frac{d^2 x}{ds^2} + (b-a) \frac{dx}{ds} + cx = h(e^s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Aplicar este método para resolver:

- a) La EDO homogénea  $t^2 x'' + 2t x' - 6x = 0$ .
- b) El PVI no homogéneo  $3t^2 x'' + 11t x' - 3x = 8 - 3 \ln t$ ,  $x(1) = 1$  y  $x'(1) = 4/3$ .

Basta relacionar las derivadas respecto a las dos variables independientes entre sí:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} = e^s \frac{dx}{dt} = t \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( e^s \frac{dx}{dt} \right) = e^s \frac{dx}{dt} + e^s \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{dt} \right) = t \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{d^2 x}{dt^2}. \end{aligned}$$

- a)  $x_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^{-3}$ .
- b)  $x(t) = \sqrt[3]{t} + \ln t$ . (Consejo: Imponer las c.i. después de deshacer el cambio.)

18. (Pb1 Junio 2001) Demostrar que si  $x(t)$  y  $y(t) \neq 0$  son soluciones de las ecuaciones

$$x'' + p(t)x'(t) + q(t)x = 0, \quad y' + r(t)y = 0,$$

entonces  $z(t) = x(t)/y(t)$  es solución de la ecuación

$$z'' + (p(t) - 2r(t))z' + (q(t) + r(t)^2 - p(t)r(t) - r'(t))z = 0.$$

Aplicación: Resolver la ecuación no homogénea

$$z'' - (3 - 2 \cos t)z' + (2 + \cos^2 t - 3 \cos t - \sin t)z = e^{-\sin t}.$$

19. (Pb2 Junio 2003)

a) Calcular la solución general de la ecuación

$$y'''' - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = \cos t.$$

b) Calcular la solución general de la ecuación

$$z'''' - z = te^{\alpha t},$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real y  $\alpha \neq \pm 1$ .

c) ¿Para qué valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tienen estas ecuaciones alguna solución común?

d) Encontrar todas las soluciones comunes para el valor de  $\alpha$  encontrado en el apartado anterior.

e) ¿Existe alguna función  $x(t)$  tal que

$$\left. \begin{array}{l} x'''' - 4x''' + 3x'' + 4x' - 4x = \cos t \\ x'''' - x = te^{\alpha t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ x''(0) = 0 \\ x'''(0) = 0 \end{array} \right\} ?$$

20. (Cuatro PVFs importantes) Calcular los VAPs y las FUPs de los siguientes PVFs.

a)  $x'' - \lambda x = 0$ ,  $x(0) = x(L) = 0$ .

b)  $x'' - \lambda x = 0$ ,  $x'(0) = x'(L) = 0$ .

c)  $x'' - \lambda x = 0$ ,  $x(0) = x'(L) = 0$ .

d)  $x'' - \lambda x = 0$ ,  $x'(-L) = x'(L) = 0$ .

Las cuatro familias de VAPs y FUPs son:

a) VAPs:  $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ , FUPs:  $x_n(t) = \sin(n\pi t/L)$ , para  $n \geq 1$ .

b) VAPs:  $\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ , FUPs:  $x_n(t) = \cos(n\pi t/L)$ , para  $n \geq 0$ .

c) VAPs:  $\lambda_n = -(n + 1/2)^2\pi^2/L^2$ , FUPs:  $x_n(t) = \sin((n + 1/2)\pi t/L)$ , para  $n \geq 0$ .

d) VAPs:  $\lambda_n^{(c)} = -n^2\pi^2/L^2$ , FUPs:  $c_n(t) = \cos(n\pi t/L)$ , para  $n \geq 0$ .

VAPs:  $\lambda_m^{(s)} = -(m + 1/2)^2\pi^2/L^2$ , FUPs:  $s_m(t) = \sin((m + 1/2)\pi t/L)$ , para  $m \geq 0$ .

Conviene recordarlas al resolver EDPs por el método de separación de variables.

21. (Test Enero 1998) ¿Cuántos VAPs negativos tiene el PVF

$$x'' - \lambda x = 0, \quad x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = 0?$$

$\lambda = -\mu^2 < 0$  es VAP  $\Leftrightarrow \tan \mu = \mu$ , luego existen infinitos VAPs negativos.

22. (Pb2 Octubre 2008) Calcular la ecuación característica  $f(\mu) = 0$  que satisfacen los VAPs de la forma  $\lambda = \mu^2 > 0$  del PVF

$$x'' = \lambda x, \quad 2x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Después, usando que  $\cosh 1 < 2 \sinh 1$  y  $\sinh 2 < \cosh 2$ , probar que existe algún VAP en el intervalo  $(1, 4)$ . (No intentéis calcular el VAP resolviendo la ecuación característica.)

La ecuación es  $f(\mu) = 2 \sinh \mu - \mu \cosh \mu = 0$ . Finalmente,  $f(1) = 2 \sinh 1 - 1 \cosh 1 > 0$  y  $f(2) = 2 \sinh 2 - 2 \cosh 2 < 0$ . Así, aplicando Bolzano,  $\exists \mu_* \in (1, 2)$  tal que  $f(\mu_*) = 0$ . Esto implica que existe algún VAP  $\lambda_* = \mu_*^2 \in (1, 4)$ .

23. (Un PVF con VAPs dobles, Test Enero 2008) Calcular todas las FUPs del PVF

$$x'' - \lambda x = 0, \quad x(0) = x(L), \quad x'(0) = x'(L).$$

Los VAPs son  $\lambda_n = -4n^2\pi^2/L^2$  para  $n \geq 0$ . Además, casi todos estos VAPs son dobles; es decir, tienen dos FUPs li. Concretamente,  $c_0(t) = 1$  es FUP de VAP  $\lambda_0$ , mientras que

$$c_n(t) = \cos(2\pi nt/L), \quad s_n(t) = \sin(2\pi nt/L)$$

son FUPs del VAP  $\lambda_n$ , para  $n \geq 1$ . Necesitaremos este resultado cuando resolvamos la ecuación del calor en un anillo.

24. (Pb1 Abril 2009) Consideramos el PVF  $(1+t)x'' + tx' - x = 0$ ,  $x'(0) = \alpha x(0)$ ,  $x(1) = x(0)$ .

- a) Calcular la solución general de la EDO usando que  $x_1(t) = e^{-t}$  es una de sus soluciones.  
 b) ¿Para qué valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tiene soluciones no triviales el PVF? Calcular esas soluciones.

- a) La segunda solución  $x_2(t) = t$  se calcula usando la fórmula de variación de parámetros, luego la solución general es  $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.  
 b) Existen soluciones no triviales si y sólo si  $\alpha = -1/e$ , en cuyo caso las soluciones no triviales son las funciones  $x(t) = c_1(e^{-t} + (1 - e^{-1})t)$ ,  $c_1 \neq 0$ .

25. (Pb1 Junio 2002) Sean  $k \neq 0$ ,  $\omega > 0$  y  $L > 0$ .

- a) Calcular la solución general de la ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes

$$x''' - 3kx'' + (\omega^2 + 3k^2)x' - k(\omega^2 + k^2)x = 0.$$

(Indicación:  $k$  es una de las raíces del polinomio característico.)

- b) Calcular la solución general la ecuación lineal no homogénea a coeficientes constantes

$$x''' - 3kx'' + (\omega^2 + 3k^2)x' - k(\omega^2 + k^2)x = e^{kt}.$$

- c) Considerando fijo el parámetro  $k \neq 0$ , calcular los VAPs  $\omega = \omega_n$  del PVF

$$\begin{cases} x''' - 3kx'' + (\omega^2 + 3k^2)x' - k(\omega^2 + k^2)x = 0 \\ x(0) = x(L) = x(-L) = 0 \end{cases}$$

- d) Encontrar todas las FUPs del PVF. (Indicación: La paridad de  $n$  es importante.)

- a)  $x_h(t) = e^{kt}(c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t)$ , donde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  son libres.  
 b)  $x_g(t) = e^{kt}(c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t + t/\omega^2)$ , donde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  son libres.  
 c) Los VAPs son  $\omega = \omega_n = n\pi/L$  para  $n \geq 1$ .  
 d) Si  $n$  es impar,  $\omega_n$  es un VAP simple y  $s_n(t) = e^{kt} \sin \omega_n t$  es una FUP. En cambio, si  $n$  es par,  $\omega_n$  es un VAP doble:  $c_n(t) = e^{kt}(1 - \cos \omega_n t)$  y  $s_n(t) = e^{kt} \sin \omega_n t$  son FUPs li.

26. (Pb1 Junio 1993) Consideramos el PVF

$$x'' + x' - 2x = b(t), \quad x(0) = x(1) = 0$$

donde el término no homogéneo  $b(t)$  es una función continua no positiva en el intervalo  $[0, 1]$ ; es decir,  $b(t) \leq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

- a) Probar que si  $x(t)$  es una solución del PVF que tiene un mínimo en un punto  $t_0 \in (0, 1)$ , entonces  $x(t_0) \geq 0$ .  
 b) Deducir del apartado anterior que las soluciones del PVF no pueden tomar valores negativos en el intervalo  $[0, 1]$ ; es decir, que  $x(t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .  
 c) Probar que si el PVF tiene alguna solución, esta solución será única.  
 d) Resolver el PVF con  $b(t) = -2$ . Comprobar las propiedades anteriores.

a) Si  $x(t_0)$  es un mínimo interior, entonces  $x'(t_0) = 0$  y  $x''(t_0) \geq 0$ , luego

$$x(t_0) = (x''(t_0) + x'(t_0) - b(t_0))/2 \geq 0.$$

b) La solución  $x(t)$  es continua en el intervalo compacto  $I = [0, 1]$ , luego tiene un mínimo absoluto  $t_* \in [0, 1]$ . Si  $t_* = 0$ , entonces  $x(t) \geq x(0) = 0$  en  $I$ . Ídem si  $t_* = 1$ . Si  $t_*$  es un punto interior, entonces  $x(t) \geq x(t_*) \geq 0$  en  $I$ .

c) Supongamos que  $x(t)$  y  $y(t)$  son dos soluciones del PVF. Usando el apartado anterior, vemos que  $z_1(t) = x(t) - y(t) \geq 0$  y  $z_2(t) = y(t) - x(t) \geq 0$  en  $I$ .

d) La solución es

$$x(t) = 1 - \frac{e^{2(1-t)} + (1+e)e^t}{e^2 + e + 1}.$$

Sea  $t_1 = \frac{1}{3} \ln(2e^2/(1+e)) \approx 0,46$ . Esta función crece en  $(0, t_1)$  y decrece en  $(t_1, 1)$ .

27. (Pb1 Junio 2009)

a) Calcular la solución general de la EDO lineal no homogénea

$$x''' - x'' + 2x = e^{-t}.$$

b) Sea  $\alpha \neq -1$ . Calcular la única solución de la EDO lineal no homogénea

$$x''' - x'' + 2x = e^{\alpha t}$$

que se anula en el origen y es una combinación lineal de las funciones  $e^{-t}$  y  $e^{\alpha t}$ . Comprobar que esa solución tiende, cuando  $\alpha \rightarrow -1$ , a alguna solución particular de la EDO del primer apartado.

c) Calcular todos los valores  $T > 0$  tales que el PVF lineal homogéneo

$$\begin{cases} x''' - x'' + 2x = 0 \\ x(0) = x(-T) = x(T) = 0 \end{cases}$$

tiene alguna solución no trivial.

d) Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  un instante arbitrario. Explicar, sin calcular nada, porqué el PVI

$$\begin{cases} x''' - x'' + 2x = 0 \\ x(t_0) = x'(t_0) = x''(t_0) = 0 \end{cases}$$

no tiene ninguna solución no trivial.

28. (Funciones periódicas y cuasiperiódicas) ¿Cuándo es periódica la “combinación” de funciones periódicas? Respuesta: Cuando todas sus frecuencias son *resonantes*; es decir, cuando el cociente de cada pareja de frecuencias es un número racional. De lo contrario, diremos que la combinación es *cuasiperiódica*. Veámoslo.

a) Probar que la combinación (suma, resta, producto, etc.) de dos funciones periódicas de frecuencias resonantes también es periódica. ¿Cómo se puede calcular el periodo de la combinación? Aplicación: Calcular el periodo de  $f(t) = \sin(3t/2) + \sin(5t/7)$ .

b) Probar que el producto  $p(t) = \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$  no es periódico si  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ .

c) Probar que la suma  $s(t) = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t$  no es periódica si  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ .

Nota para el futuro: Las funciones constantes son periódicas de cualquier periodo.

*Los dos últimos apartados no son fáciles.*

a) El periodo de la combinación es el MCM de los periodos iniciales. Por tanto, el periodo de  $\sin(3t/2) + \sin(5t/7)$  es  $T = \text{m.c.m.} \left[ \frac{4}{3}\pi, \frac{14}{5}\pi \right] = \frac{2}{15}\pi \text{ m.c.m.} [10, 21] = \frac{420}{15}\pi = 28\pi$ .

b) Si el producto fuera  $T$ -periódico, entonces  $\cos(\omega_1 T) \cos(\omega_2 T) = p(T) = p(0) = 1$ . En particular, las cantidades  $\omega_1 T$  y  $\omega_2 T$  serían múltiplos enteros de  $\pi$  y eso implicaría que el cociente de frecuencias es racional. Contradicción.

c) Si la suma fuera  $T$ -periódica, entonces

$$s_1 + s_2 = s(T) = s(0) = 0, \quad \omega_1^2 s_1 + \omega_2^2 s_2 = -s''(T) = -s''(0) = 0,$$

donde  $s_1 = \sin(\omega_1 T)$  y  $s_2 = \sin(\omega_2 T)$ . Resolviendo:  $s_2 = -s_1$  y  $(\omega_1^2 - \omega_2^2)s_1 = 0$ . Como estamos suponiendo que  $\omega_1 \neq \pm\omega_2$ , necesariamente  $s_1 = s_2 = 0$ . En particular, las cantidades  $\omega_1 T$  y  $\omega_2 T$  serían múltiplos enteros de  $\pi$  y eso implicaría que el cociente de frecuencias es racional. Contradicción.

29. (Pb4 Abril 2010) Tenemos una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes cuyo polinomio característico es  $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)$ , con  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ .

- Escribir la solución general de la EDO.
- ¿Existe alguna solución que no sea acotada? Razonar la respuesta.
- ¿Cuándo existen soluciones que son cuasiperiódicas, pero no periódicas? Mostrar, tras escoger unos valores adecuados de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , algún ejemplo de solución cuasiperiódica pero no periódica.

a)  $x_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(\omega_1 t) + c_4 \sin(\omega_1 t) + c_5 \cos(\omega_2 t) + c_6 \sin(\omega_2 t)$ ,  $c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}$ .

b) Sí. Por ejemplo,  $x(t) = t$ .

c) Cuando las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no son resonantes; es decir, cuando  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ . Por ejemplo, si tomamos  $\omega_2 = 1$  y  $\omega_1 = \pi$ , la solución  $x(t) = \sin \pi t + \sin t$  es cuasiperiódica, pero no es periódica.

30. (Forma amplitud-fase) Escribir en forma amplitud-fase la solución del PVI

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2\sqrt{2}.$$

La solución es  $x(t) = \sqrt{5} \sin(\sqrt{2}t + \varphi)$ , con  $\varphi = \arcsin(-1/\sqrt{5}) \simeq -2,677$  radianes.

31. (Valores críticos de oscilaciones subamortiguadas) Probar que la sucesión formada por los valores críticos (máximos y mínimos) de una oscilación subamortiguada es una progresión geométrica. Calcular su razón.

Una oscilación subamortiguada es de la forma  $x(t) = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$  y sus puntos críticos se encuentran resolviendo la ecuación

$$Ae^{-kt} \sqrt{\omega^2 + k^2} \sin(\omega t + \psi) = x'(t) = 0,$$

donde  $\psi$  es una fase que no hace falta calcular. Las soluciones de esta ecuación son  $t_n = (\pi n - \psi)/\omega$ , luego  $x_n = x(t_n) = x_0 r^n$ , siendo  $x_0 = Ae^{k\psi/\omega} \sin(\varphi - \psi)$  el valor inicial y  $r = -e^{-\pi k/\omega}$  la razón de la progresión. La oscilación subamortiguada  $x(t)$  y las funciones exponenciales  $e_{\pm}(t) = \pm Ae^{-kt}$  no son tangentes en los puntos  $t = t_n$ . ¿Por qué?

32. (Oscilaciones forzadas no amortiguadas) Consideramos las oscilaciones

$$x'' + \omega_0^2 x = b(t),$$

con frecuencia interna  $\omega_0 = 1$  y fuerzas externas periódicas

- $b(t) = \sin \pi t$ .
- $b(t) = \sin 2t + \sin 3t$ .
- $b(t) = 4 \sin^3 t$ .
- $b(t) = 2 \sin^2 t$ .

Calcular el periodo mínimo y la solución general (podeis usar MATLAB) correspondiente a cada fuerza externa. ¿Existen soluciones periódicas? ¿Y cuasiperiódicas? ¿Y acotadas?

La solución de la ecuación homogénea es  $x_h(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ .

a) A la fuerza  $b(t) = \sin \pi t$ , de periodo  $p = 2$ , le corresponde la solución general

$$x_g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{\pi^2 - 1} \sin \pi t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como las frecuencias  $\omega_0 = 1$  y  $\omega = \pi$  no son resonantes, la única solución periódica se obtiene con  $c_1 = c_2 = 0$  y tiene el mismo periodo que la fuerza externa:  $p = 2$ . El resto son cuasiperiódicas. Todas son acotadas.

b) La fuerza externa tiene periodo  $p = \text{m.c.m.}[\pi, 2\pi/3] = 2\pi$  y le corresponde la solución general

$$x_g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 3t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Las frecuencias  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 2$  y  $\omega_2 = 3$  son resonantes, luego todas las soluciones son periódicas de periodo  $T = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_0, 2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \frac{\pi}{3} \text{m.c.m.}[6, 3, 2] = 2\pi$ .

c) La fuerza externa tiene periodo  $p = 2\pi$  y le corresponde la solución general

$$x_g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{8} \sin 3t - \frac{3}{2} t \cos t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aquí hemos usado que  $4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin 3t$ . El término  $\frac{3}{2} t \cos t$  oscila de forma no acotada, luego esta ecuación no posee ninguna solución periódica, cuasiperiódica o acotada. Es un caso de resonancia no amortiguada.

d) La fuerza externa tiene periodo  $p = \pi$  y le corresponde la solución general

$$x_g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 + \frac{1}{3} \cos 2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aquí hemos usado que  $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$ . Las frecuencias  $\omega_0 = 1$  y  $\omega = 2$  son resonantes, luego todas las soluciones son periódicas de periodo  $T = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_0, 2\pi/\omega] = \pi \text{m.c.m.}[2, 1] = 2\pi$ . Además, una de ellas tiene periodo  $T = \pi$ . ¿Cuál?

33. (Pulsación o batimiento) El *batimiento* es un fenómeno acústico que se genera al interferirse entre sí dos ondas con frecuencias ligeramente distintas. La *frecuencia de batimiento* es igual a la mitad de la diferencia de las frecuencias de las dos ondas originarias. Vamos a verlo.

Consideramos el PVI oscilatorio

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

cuando su *frecuencia natural* (también llamada *interna*)  $\omega_0$  y su *frecuencia externa*  $\omega$  son ligeramente distintas:  $\omega \neq \omega_0$ , pero  $\omega \approx \omega_0$ .

a) Probar que la solución del PVI es

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_+ \omega_-} \sin(\omega_- t) \sin(\omega_+ t), \quad \omega_{\pm} = (\omega_0 \pm \omega)/2.$$

b) Dibujar la gráfica aproximada de esta función suponiendo que  $\omega \approx \omega_0$ , en cuyo caso  $\omega_+ \approx \omega_0$  y  $\omega_- \ll 1$ .

c) Calcular el límite de la solución cuando tendemos al caso resonante:  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

En <http://www-math.mit.edu/daimp/Beats.html> se puede visualizar este fenómeno con un applet de JAVA. En <http://www.ma1.upc.edu/~edis/Batimiento.ogg> podeis escuchar un ejemplo en el formato de audio libre OGG. Entrada Wikipedia: Beat (acoustics).

*Un ejemplo familiar de batimiento es cuando se pulsan dos cuerdas de guitarra de frecuencias parecidas, efecto utilizado habitualmente para afinarlas.*

a) La solución general de la oscilación es

$$x_g(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Determinamos las constantes imponiendo las c.i.:  $c_1 = -A/(\omega_0^2 - \omega^2)$  y  $c_2 = 0$ . Para acabar, basta recordar la relación trigonométrica

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \sin((\alpha - \beta)/2).$$

b) Consultar la entrada inglesa de Wikipedia: Beat (acoustics).

c)  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$ .

34. (Factor de amplificación, curva de respuesta & principio de superposición)

a) Probar que la solución periódica de la oscilación forzada amortiguada

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = A \sin(\omega t), \quad A, k, \omega_0, \omega > 0$$

se puede expresar en la forma amplitud-fase

$$\bar{x}(t) = MA \sin(\omega t + \varphi).$$

Calcular explícitamente el *factor de amplificación*  $M$  y comprobar que tiende a infinito cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$  y  $k \rightarrow 0$ . Dibujar las *curvas de respuesta*; es decir, graficar el factor  $M$  versus la frecuencia  $\omega$  para varios valores fijos de  $k$ .

En <http://www-math.mit.edu/daimp/ForcedDampedVib.html> se puede visualizar este fenómeno con un applet de JAVA, aunque allí la fuerza exterior es una onda coseno. En <http://www.walter-fendt.de/ph11e/resonance.htm> teneis un applet más bonito.

b) Calcular la solución cuasiperiódica de la oscilación forzada amortiguada

$$x'' + 2kx' + \omega_0 x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t).$$

¿Es globalmente atractora? ¿Es periódica? ¿Es acotada?

a) *El factor de amplificación es*

$$M = \frac{1}{\sqrt{4k^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

b) *Por superposición, la suma  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , donde*

$$x_j(t) = M_j A_j \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad M_j = \frac{1}{\sqrt{4k^2\omega_j^2 + (\omega_0^2 - \omega_j^2)^2}}$$

*es una solución particular. Todas las soluciones de una oscilación forzada amortiguada son atractoras globales. En particular, ésta también. Pero sólo será periódica si las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son resonantes; es decir, si su cociente  $\omega_1/\omega_2$  es racional. De lo contrario es una función cuasiperiódica y acotada.*

35. (Pb5 Abril 2010) Calcular el régimen permanente de la EDO  $x'' + x' + x = \cos t - 2 \sin t$ . ¿Qué tipo de oscilación es esta EDO? ¿Qué es el régimen permanente de una oscilación de ese tipo? ¿Por qué se llama permanente?

*Una oscilación forzada amortiguada cuyo término no homogéneo es periódico. El régimen permanente  $\bar{x}(t)$  es la única solución periódica. Se llama permanente pues su comportamiento se repite, no varía, y cualquier otra solución se acerca a ella. Sabemos que existe una solución particular de la forma  $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$ , con  $A, B \in \mathbb{R}$ . Como  $x_p(t)$  es periódica,  $\bar{x}(t) = x_p(t)$ . Los coeficientes se determinan imponiendo que  $\bar{x}(t)$  cumpla la EDO:  $\bar{x}(t) = 2 \cos t + \sin t$ .*

36. (Pb1 Septiembre 1994) Tenemos la ecuación no homogénea  $x'' + 2\alpha^2 x' + (\alpha^4 + 1)x = \alpha \cos t$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro.

- Calcular un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada y su Wronskiano.
- Encontrar la solución general de la ecuación no homogénea.
- ¿Para qué valores de  $\alpha$  son periódicas todas las soluciones de la ecuación?

Un conjunto fundamental es  $\{e^{-\alpha^2 t} \cos t, e^{-\alpha^2 t} \sin t\}$  y su Wronskiano es  $W(t) = e^{-2\alpha^2 t}$ . Si  $\alpha \neq 0$ , la solución general es

$$x_g(t) = e^{-\alpha^2 t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{\alpha^2 \cos t + 2 \sin t}{\alpha(\alpha^4 + 4)},$$

y sólo hay una solución periódica que se corresponde a los valores  $c_1 = c_2 = 0$ .

Cuando  $\alpha = 0$ , la solución general es  $x_g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ , la cual es  $2\pi$ -periódica.

37. (Pb2 Julio 2008) Esto no es un problema de oscilaciones, aunque las ideas son similares.

a) Calcular la solución general de la ecuación lineal homogénea

$$x''' + 2x'' + 9x' + 18x = 0.$$

b) ¿Para qué frecuencia  $\omega_0 > 0$  tiene la ecuación homogénea anterior soluciones periódicas de periodo mínimo  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  ?

c) Dada una amplitud  $A$  y una frecuencia  $\omega \neq \omega_0$ , calcular mediante el método de los coeficientes indeterminados una solución particular periódica  $x_p(t)$  de la ecuación no homogénea

$$x''' + 2x'' + 9x' + 18x = A \sin(\omega t).$$

d) Calcular explícitamente el *factor de amplificación*  $M$  tal que

$$x_p(t) = MA \sin(\omega t + \varphi)$$

al trabajar con la forma amplitud-fase.

e) ¿Tiene alguna solución periódica la ecuación no homogénea cuando  $\omega = \omega_0$ ? ¿Por qué?

f) ¿Para qué frecuencias  $\omega$  tiene la ecuación no homogénea infinitas soluciones periódicas?

38. (Pb1 Febrero 1996) Resolver el PVI

$$x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0$$

en función de los parámetros  $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$ . ¿Para qué valores de  $x_0$  y  $x'_0$  es periódica la solución?

Para  $x_0 = -1/2$  y  $x'_0 = 0$ .



## Sistemas Lineales

### 1. (SLs a coeficientes constantes con MATLAB)

a) Usar el comando `dsolve` de MATLAB para resolver simbólicamente el PVI

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} .$$

b) Usar el comando `dsolve` de MATLAB para calcular simbólicamente la solución general del sistema  $X' = AX$ , donde  $A$  es la matriz  $4 \times 4$  del siguiente apartado.

c) Usar el comando `expm` de MATLAB (no confundir con `exp`) para calcular numéricamente el valor en el instante  $t_f = 2$  de la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 1.$$

Esta matriz tiene dos VAPs complejos conjugados dobles y, además, no diagonaliza.

a) Para obtener la solución  $X(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$ , podemos usar el código

```
>> eq1='Dx1=x1-x2'; eq2='Dx2=x1+3*x2'; ci1='x1(0)=1'; ci2='x2(0)=0';
>> sol=dsolve(eq1,eq2,ci1,ci2);
>> [sol.x1;sol.x2]
ans =
exp(2*t)*(1-t)
exp(2*t)*t
```

b) >> sistema='Dx1=x1-x2+x3,Dx2=x1+x2+x4,Dx3=x3-x4,Dx4=x3+x4';

```
>> sol=dsolve(sistema);
>> [sol.x1;sol.x2;sol.x3;sol.x4]
ans =
exp(t)*(sin(t)*C2+cos(t)*C1+C3*cos(t)+sin(t)*C3*t+cos(t)*C4*t)
-exp(t)*(cos(t)*C2-sin(t)*C1-C3*sin(t)+cos(t)*C3*t-sin(t)*C4*t)
exp(t)*(C3*sin(t)+cos(t)*C4)
-exp(t)*(C3*cos(t)-C4*sin(t))
```

c) La solución del PVI es  $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ . Implementamos esta fórmula con el código:

```
>> A=[1 -1 1 0;1 1 0 1;0 0 1 -1;0 0 1 1]; X0=[1;2;3;4]; t0=1; tf=2;
>> Xf=expm((tf-t0)*A)*X0
Xf =
-7.8494
17.9616
-4.7433
12.7368
```

2. (SLs homogéneos a coeficientes constantes) Calcular una matriz fundamental y la solución general de los sistemas lineales  $X' = AX$ . Calcular también  $e^{tA}$ .

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ .

b)  $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Si  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental cualquiera, entonces  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$  es la solución general y  $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ . Por tanto, basta calcular matrices fundamentales.

a)  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$ .

b)  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t & 2 \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t & -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix} e^{-t}$ .

c)  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ .

d)  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 25e^t & \cos 5t - 5 \sin 5t & \sin 5t + 5 \cos 5t \\ -7e^t & \cos 5t & \sin 5t \\ 6e^t & \cos 5t & \sin 5t \end{pmatrix}$ .

3. (Forma de Jordan real) Sabemos que si  $A$  es una matriz real  $2 \times 2$  con VAPs complejos conjugados  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  y VEPs  $\vec{v}_{1,2} = \vec{u} \pm \vec{w}i$ , entonces  $J_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{R}}^{-1}AS_{\mathbb{R}}$ , donde

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad S_{\mathbb{R}} = \left( \vec{u} \mid \vec{w} \right).$$

Probar que  $e^{tA} = S_{\mathbb{R}}e^{tJ_{\mathbb{R}}}S_{\mathbb{R}}^{-1}$  y  $e^{tJ_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t}$ . Comprobar que

$$\text{traza } e^{tA} = e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} = 2e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \det e^{tA} = e^{t\lambda_1} \cdot e^{t\lambda_2} = e^{2\alpha t}.$$

Aplicación: Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , calcular  $e^{tA}$ .

La matriz exponencial es  $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2 \sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$ . Intentamos detectar errores de dos formas. Primera, la matriz exponencial en el instante  $t = 0$  debe ser la matriz identidad. Segunda, comprobamos que su traza y su determinante cumplen las propiedades del enunciado.

4. (Pb3 Abril 2009) Calcular la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(0) = X_0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Tiene el sistema  $X' = AX$  alguna solución  $X(t)$  acotada para todo  $t \in \mathbb{R}$ ?

La solución general del sistema es  $X_h(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$ , con  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  libres. Por tanto, la única solución del sistema acotada en toda la recta real es la función idénticamente nula. La solución del PVI se obtiene tomando  $c_1 = c_3 = 1$  y  $c_2 = 2$ ; es decir,  $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ .

5. (Reducción a coeficientes constantes) Dado un exponente  $p \in \mathbb{R}$ , encontrar un cambio de variables  $t = g(s)$  que reduzca el sistema lineal

$$\frac{dX}{dt} = t^p AX$$

a un sistema lineal a coeficientes constantes. Advertencia: El caso  $p = -1$  es especial.

- a) Resolver el caso  $p = 1$  y  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ .  
 b) Resolver el caso  $p = 2$  y  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .  
 c) Resolver el caso  $p = -1$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Si  $p \neq -1$ , entonces el cambio  $s = t^{p+1}$  reduce el sistema inicial al sistema

$$\frac{dX}{ds} = \frac{1}{p+1} AX.$$

Finalmente, el cambio  $t = e^s$  reduce el sistema  $tX' = AX$  al sistema  $X' = AX$ .

Aplicando estos cambios, obtenemos las soluciones generales:

- a)  $X_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t^2}$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.  
 b)  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$ , pues  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3/3) & \sin(t^3/3) \\ \sin(t^3/3) - \cos(t^3/3) & -\sin(t^3/3) - \cos(t^3/3) \end{pmatrix} e^{t^3/3}$  es una matriz fundamental.  
 c)  $X_h(t) = \Phi(t)\vec{c}$ , pues  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \ln t & t^2 \\ t^2(1 + \ln t) & t^2 \end{pmatrix}$  es una matriz fundamental.

6. (Variación de parámetros) Resolver los sistemas no homogéneos  $X' = AX + F(t)$ , donde

- a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  y  $F(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
 b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$ .  
 c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ .

La soluciones generales de estos sistemas son:

- a)  $X_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 15 + 11t \\ 10 + 11t \end{pmatrix}$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.  
 b)  $X_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 3 + 2t \end{pmatrix} e^t$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.  
 c) Usando que  $A$  es una forma de Jordan real con  $\alpha = 1$  y  $\beta = -1$ , es fácil ver que

$$X_g(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + t) \cos t - c_2 \sin t \\ (c_1 + t) \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. (Pb3 Noviembre 2009) Calcular la solución general del sistema  $X' = AX + b$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X_g(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^t \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 1 \end{pmatrix}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ libres.}$$

8. (Pb4 Abril 2009, Teoría Junio 2009) Probar que si  $\lambda$  es un VAP de una matriz  $A$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  cumplen

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}, \quad A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

entonces las funciones  $X_1(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$  y  $X_2(t) = e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$  son soluciones del sistema  $X' = AX$ .

*La prueba referente a  $X_1(t)$  está en los apuntes de teoría. La otra es similar:*

$$X_2'(t) = \lambda e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v}) + e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}(\lambda\vec{u} + t\lambda\vec{v} + \vec{v}) = e^{\lambda t}(A\vec{u} + tA\vec{v}) = e^{\lambda t}A(\vec{u} + t\vec{v}) = AX_2(t).$$

9. (Pb2 Junio 2009) Consideramos las matrices a coeficientes variables

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos 2t & -1 + \sin 2t \\ 1 + \sin 2t & 1 - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad S(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal a coeficientes constantes

$$D = \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

- Calcular la matriz exponencial  $e^{tD}$ . El sistema lineal a coeficientes constantes  $Y' = DY$ , ¿es estable, inestable o asintóticamente estable? Justificar la respuesta.
- Probar que el cambio  $X = S(t)Y$  transforma el sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$  en el sistema lineal a coeficientes constantes  $Y' = DY$ .  
(Indicación: Usar, sin probarla, la relación  $S'(t) = A(t)S(t) - S(t)D$ .)
- Usar el cambio anterior y la matriz exponencial  $e^{tD}$  para calcular la matriz principal del sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$ .  
(Observación: La matriz principal es una matriz real.)
- El sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$ , ¿tiene alguna solución que escapa a infinito?, ¿tiene alguna solución acotada no nula?, ¿tiene alguna solución periódica no nula? En caso afirmativo, dar ejemplos y el periodo.
- Resolver el PVI lineal no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$ ,  $X(0) = X_0$ , donde

$$b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- $e^{tD} = e^{it} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . El sistema es inestable pues el VAP  $\lambda_1 = 2 + i$  tiene parte real positiva.
- Derivando el cambio  $X = S(t)Y$ , obtenemos que  $X' = S'(t)Y + S(t)Y'$ , luego

$$S'(t)Y + S(t)Y' = X' = A(t)X = A(t)S(t)Y \Rightarrow S(t)Y' = (A(t)S(t) - S'(t))Y = S(t)DY.$$

*Y multiplicando la última ecuación por la inversa de  $S(t)$ , se llega al sistema  $Y' = DY$ .*

- $\Psi(t) = S(t)e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -\sin t \\ e^{2t} \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  es una matriz fundamental del sistema  $X' = A(t)X$ .  
De hecho, resulta ser la matriz principal, pues  $\Psi(0) = \text{Id}$ .

d) La solución general del sistema homogéneo a coeficientes variables  $X' = A(t)X$  es

$$X_h(t) = \Psi(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 e^{2t} \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Existen soluciones que espiralan hacia infinito, basta tomar  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 = 0$ . También existen soluciones acotadas y periódicas, basta tomar  $c_1 = 0$  y  $c_2 \neq 0$ . El periodo es  $2\pi$ .

e) Aplicando la fórmula de variación de parámetros:

$$X(t) = \Psi(t) \left( X_0 + \int_0^t \Psi(s)^{-1} b(s) ds \right) = \begin{pmatrix} (t+3)e^{2t} \cos t - 4 \sin t \\ (t+3)e^{2t} \sin t + 4 \cos t \end{pmatrix}.$$

10. (Pb2 Septiembre 1990 & Pb1 Julio 2008) Probar que si  $\vec{v}$  es un VEP constante de VAP  $\lambda(t)$  de una matriz  $A(t)$ , entonces  $X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} \cdot \vec{v}$  es una solución del sistema  $X' = A(t)X$ .

a) Aplicar este resultado para resolver el sistema lineal homogéneo  $X' = A(t)X$ , donde

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

b) Ídem para resolver el sistema lineal no homogéneo  $X' = A(t)X + F(t)$ , donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

La prueba es corta:  $X' = e^{\int \lambda(t) dt} \lambda(t) \vec{v} = e^{\int \lambda(t) dt} A(t) \vec{v} = A(t) e^{\int \lambda(t) dt} \vec{v} = A(t)X$ .

a)  $X_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t(\ln t - 1)} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres, pues  $\int \ln t dt = t(\ln t - 1)$ .

b)  $X_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.

11. (Pb3 Abril 2010) Calcular la solución general real del SL homogéneo  $X' = AX$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores  $L > 0$  tiene soluciones no triviales el PVF  $X' = AX$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(L) = 0$ ?

La solución general es  $X_h(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1(\sin t - \cos t) - c_2(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} e^t$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  libres.

Existen soluciones no triviales si y sólo si  $L = L_n = 3\pi/4 + n\pi$ , para  $n \geq 0$ .

12. (Pb1 Enero 2002) Sea  $F : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua cualquiera. Probar que el PVF

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X + F(t), \quad x_1(0) = x_2(L) = 0$$

tiene exactamente una única solución. Aquí, las funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son las componentes del vector solución  $X(t)$ . Indicación: No hace falta calcular ninguna solución particular.

13. (El criterio traza-determinante para SLs planos a coeficientes constantes) Dada una matriz  $A$  de orden dos, sean  $T = \text{traza } A$ ,  $D = \det A$  y  $\Delta = T^2 - 4D$  la traza de  $A$ , el determinante de  $A$  y el discriminante del polinomio característico de  $A$ . Probar que el SL plano  $X' = AX$  es:

- Asintóticamente estable si y sólo si  $D > 0$  y  $T < 0$ .
- Estable, pero no asintóticamente estable cuando: 1)  $D = 0$  y  $T < 0$ ; o 2)  $T = 0$  y  $D > 0$ .
- Inestable cuando  $D < 0$  o  $T > 0$ .
- Una silla si y sólo si  $D < 0$ .
- Un centro si y sólo si  $T = 0$  y  $D > 0$ .
- Un foco si y sólo si  $T \neq 0$  y  $\Delta < 0$ .

- Un nodo si y sólo si  $D > 0$  y  $\Delta \geq 0$ .

Representar gráficamente estos resultados en el plano de coordenadas  $(T, D)$ .

*Estas demostraciones se pueden encontrar en los apuntes de teoría.*

14. (Croquis de sistemas lineales) Dibujar un croquis aproximado de los siguientes SLs. Si existen direcciones de entrada y/o salida, dibujarlas con precisión. Si existe más de una dirección de entrada (o salida), determinar la más rápida. Si las trayectorias giran, dilucidar el sentido de giro. Si existe una recta de puntos de equilibrio, calcularla con precisión.

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

c)  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

d)  $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

e)  $E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ .

f)  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) *Nodo propio inestable. Dirección lenta:  $\vec{v}_1 = (1, 3)^T$  Dirección rápida:  $\vec{v}_2 = (1, 1)^T$ .*

b) *Silla. Dirección de salida:  $\vec{v}_1 = (0, 1)^T$ . Dirección de entrada:  $\vec{v}_2 = (1, -1)^T$ .*

c) *Foco inestable. Giro antihorario.*

d) *Centro. Giro antihorario.*

e) *Nodo impropio asintóticamente estable. Única dirección de entrada:  $\vec{v} = (1, 1)^T$ .*

f) *Sistema degenerado inestable. Dirección recta puntos de equilibrio:  $\vec{v}_1 = (0, 1)^T$ . Dirección de salida:  $\vec{v}_2 = (1, 1)^T$ . Todas la trayectorias son paralelas a la dirección de salida.*

15. (Test Enero 1998) Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matriz real con VAPs complejos conjugados. Dar una condición suficiente para que las órbitas del sistema  $X' = AX$  giren en sentido horario.

*Una condición suficiente es  $c < 0$ . Otra es  $b > 0$ .*

16. (Test Enero 1998) Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  una matriz real con un VAP doble no nulo. Dar una condición necesaria y suficiente para que el sistema  $X' = AX$  sea un nodo propio.

*Una condición necesaria y suficiente es que  $b = c = 0$ .*

17. (Test Enero 1999) Sea  $X(t)$  la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu^2 & 2\mu \\ 2\mu & \mu^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valor de  $\mu \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \mathbf{0}$ ?

*Para  $\mu = -2$ .*

18. (Test Enero 2002) Sea  $X(t)$  la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valor de  $\mu \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \mathbf{0}$ ?

*Para ningún valor de  $\mu$ .*

19. (Test Enero 2006) Sea  $X(t)$  la solución del PVI  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

¿Qué condición deben cumplir los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  para que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \mathbf{0}$ ?

*Una condición necesaria y suficiente es  $\beta = -(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})\alpha$ .*

20. (Diagrama de bifurcaciones) Determinar el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la estabilidad y clasificación del sistema lineal asociado a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

¿Cuáles son las bifurcaciones que conllevan un cambio de estabilidad?

*Este sistema lineal es:*

- *Un foco asintóticamente estable (AE) si  $\alpha < 0$ ,*
- *Un centro (E, pero no AE) si  $\alpha = 0$ ,*
- *Un foco inestable (I) si  $\alpha \in (0, 1)$ ,*
- *Un nodo impropio inestable (I) si  $\alpha = 1$ , y*
- *un nodo propio inestable (I) si  $\alpha > 1$ .*

*Existen dos valores de bifurcación:  $\alpha = 0, 1$ , pero la estabilidad sólo cambia en el primero.*

21. (Pb2 Enero 1998 & Pb2 Enero 2002) Determinar el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la estabilidad y la clasificación del sistema lineal asociado a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 - 3\mu^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

¿Cuáles son las bifurcaciones que conllevan un cambio de estabilidad?

22. (Dibujando las elipses en un centro lineal) Consideramos el centro lineal  $X' = AX$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) ¿Cuál es el sentido de giro?
- b) Calcular  $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$  tales que la forma cuadrática

$$V(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \delta y^2$$

sea definida positiva y además sea una integral primera del sistema; es decir,

$$\frac{d}{dt}[V(x, y)] = 0.$$

- c) Determinar la estabilidad del sistema sin usar el criterio traza-determinante ni los VAPs.
- d) Dibujar el retrato de fases del sistema con la mayor precisión posible. Es decir, dibujar exactamente las elipses que forman las trayectorias.

- a) Sentido horario.
- b) Criterio de Sylvester:  $V(x, y)$  es definida positiva si y sólo si  $\alpha > 0$  y  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{vmatrix} > 0$ .  $V(x, y)$  es una integral primera si y sólo si  $\delta = 4\alpha$  y  $\beta = 0$ . Una opción es  $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ .
- c) Las trayectorias del sistema están contenidas en las curvas de nivel de la función  $V(x, y)$ , que son elipses alrededor del origen. Por tanto, el origen es E pero no AE.
- d) Las elipses tienen los ejes en los ejes de coordenadas. Cada eje vertical es la mitad del horizontal.

23. (Pb2 Junio 2006) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos VAPs son:  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  y  $\lambda_3 = 2$ .

- a) Calcular  $e^{tA}$ . (Consejo: Para comprobar los cálculos, verificar que  $e^{0A}$  es la matriz identidad y que  $\text{traza}(e^{tA}) = \text{traza}(e^{tD})$ , donde  $D$  es la forma diagonal de  $A$ .)
- b) Resolver el PVI

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar la recta que contiene a la solución.

- c) Resolver el PVI

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y encontrar el plano que contiene a la solución.

- d) Dibujar la recta, el plano y las dos trayectorias que se obtienen a partir de las soluciones de ambos PVI. Marcar el sentido de giro de la trayectoria contenida en el plano. Deducir de todo lo anterior, sin necesidad de ser completamente riguroso, el aspecto que tienen las trayectorias que no están contenidas ni en el plano ni en la recta.

24. (Pb2 Enero 2010) Consideramos el sistema lineal 3D a coeficientes constantes

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2x + y + z \\ y' &= -y + 4z \\ z' &= z \end{aligned} \right\}.$$

- a) Calcular su solución general y estudiar su estabilidad.
- b) Calcular y dibujar el plano invariante  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  sobre el cual el sistema 3D es asintóticamente estable; es decir, cualquier trayectoria que empieza sobre  $\pi$  tiende al origen sin salirse del plano.  
Clasificar el sistema 2D que se obtiene sobre ese plano, dibujar un croquis de sus trayectorias y explicar con precisión cómo tienden las trayectorias al origen.
- c) ¿Cómo se comportan las trayectorias fuera del plano  $\pi$ ? ¿Puede una trayectoria cruzar el plano  $\pi$ ? ¿Por qué? ¿Existen otros planos invariantes? ¿Cuáles? Dibujar un croquis aproximado de las trayectorias del sistema 3D.

- a) Los VAPs son  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$  y  $\lambda_3 = 1$ . El sistema es inestable pues  $\lambda_3 > 0$ . Los VEPs son  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$  y  $\vec{v}_3 = (1, 2, 1)$ . Por tanto, la solución general del sistema es

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^t \\ y(t) &= c_2 e^{-t} + 2c_3 e^t \\ z(t) &= c_3 e^t \end{aligned} \right\},$$

donde los coeficientes  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  son libres.

- b) Sea  $r_j = [\vec{v}_j]$  la recta que pasa por el origen con dirección  $v_j$ . Como  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ , sabemos que  $r_1$  es la recta de entrada rápida,  $r_2$  es la recta de entrada lenta y  $r_3$  es la recta de salida. El plano horizontal  $\pi = \{z = 0\}$  contiene a las dos rectas de entrada, luego es un plano invariante asintóticamente estable y el sistema 2D sobre  $\pi$  es un nodo propio asintóticamente estable, pues tiene dos rectas de entrada de VAPs diferentes. Las trayectorias sobre  $\pi$  no contenidas en las rectas de entrada tienden al origen tangencialmente a la recta de entrada lenta  $r_2$ .
- c) Si la trayectoria empieza fuera del plano  $\pi$ , entonces  $c_3 \neq 0$  y la solución escapa a infinito acercándose a la recta de salida  $r_3$ . Una trayectoria no puede cruzar  $\pi$ , pues es un plano invariante y tenemos unicidad de soluciones. Sí, existen otros dos planos invariantes; a saber, los determinados por la recta de salida  $r_3$  y cualquiera de las rectas de entrada. Sobre esos planos el sistema inicial es una silla, pues tiene una dirección de entrada y otra de salida.

25. (Pb2 Enero 2009) Consideramos el sistema lineal  $X' = AX$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

siendo  $\alpha$  un parámetro real.

- a) Calcular su estabilidad y clasificarlo en función de  $\alpha$ .
- b) Dibujar un croquis de sus trayectorias en el plano  $(x_1, x_2)$  para cada uno de los siguientes valores del parámetro:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ .
- En uno de los tres casos anteriores hay una recta de entrada y otra de salida. En ese caso, ¿es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante llegue al tercer cuadrante? ¿Por qué?
  - En otro caso todas las trayectorias son periódicas, pero ¿de qué periodo?
  - Y en otro caso el sistema es degenerado, pero ¿es inestable? ¿Por qué?



## Sistemas No Lineales

1. (Ecuación Logística) Dibujar el retrato de fases de la ecuación no lineal

$$x' = kx(1 - x/m), \quad k, m > 0.$$

Es decir, calcular sus puntos de equilibrio, estudiar su estabilidad y representar gráficamente el comportamiento de sus trayectorias en la recta real  $x \in \mathbb{R}$ .

Sea  $x(t)$  la solución que cumple la condición inicial  $x(0) = x_0$ . Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  en función del valor  $x_0$ .

*La expresión  $kx(1 - x/m)$  es negativa en  $(-\infty, 0) \cup (m, +\infty)$ , positiva en  $(0, m)$  y se anula en los puntos de equilibrio  $x = 0$  y  $x = m$ . Por tanto, la solución del PVI*

$$x' = kx(1 - x/m), \quad x(0) = x_0$$

*tiende al punto  $x = m$  si  $x_0 > 0$ , tiende a  $x = -\infty$  si  $x_0 < 0$ , y es la función nula si  $x_0 = 0$ . En particular, el punto  $x = m$  es asintóticamente estable y el punto  $x = 0$  es inestable.*

2. (Otra ecuación 1D, Teoría Enero 2010) Consideramos la EDO no lineal 1D autónoma

$$x' = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Calcular todos sus puntos de equilibrio y su estabilidad.
- ¿Existe alguna solución que escape a más o menos infinito? Razonar la respuesta.
- ¿Existe alguna solución  $2\pi$ -periódica no constante? Razonar la respuesta.
- Dadas dos soluciones arbitrarias  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , consideramos los límites

$$x_1(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t), \quad x_2(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t).$$

¿Qué posibles valores puede tomar la diferencia  $x_1(+\infty) - x_2(+\infty)$ ?

- Los puntos de equilibrio cumplen  $\sin x = 0$ , luego son los múltiplos enteros de  $\pi$ . La solución crece cuando  $x' = \sin x > 0$  y decrece cuando  $x' = \sin x < 0$ . Por tanto, si notamos por  $x_n = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , a los puntos de equilibrio y por  $I_n = (x_n, x_{n+1})$  a los intervalos que delimitan, vemos que la solución  $x(t)$  crece cuando está contenida en  $I_n$  con  $n$  par, pero decrece si  $n$  es impar. Entonces los puntos de equilibrio  $x_n$  son inestables si  $n$  es par y asintóticamente estables si  $n$  es impar.
- No, pues cualquier solución no constante está confinada entre dos posiciones de equilibrio consecutivas.
- No, pues cualquier solución no constante está confinada en un intervalo  $I_n$ , tendiendo a uno de sus extremos cuando  $t \rightarrow +\infty$  y al otro cuando  $t \rightarrow -\infty$ .
- Los múltiplos de  $\pi$ , pues tanto  $x_1(+\infty)$  como  $x_2(+\infty)$  son puntos de equilibrio de la EDO. Cuando las soluciones no son constantes,  $x_1(+\infty)$  como  $x_2(+\infty)$  son puntos de equilibrio asintóticamente estables, luego la diferencia es un múltiplo par de  $\pi$ .

3. (Sistema desacoplado, Pb2 Septiembre 1992) Calcular los puntos de equilibrio y la estabilidad en cada uno del SNL plano desacoplado

$$\begin{cases} x' &= -x + 3x^2 - 2x^3 \\ y' &= -2y \end{cases}.$$

Dibujar el retrato de fases con todo detalle.

Hay tres puntos de equilibrio:  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 0)$  y  $(1, 0)$ . El segundo es inestable, los otros son asintóticamente estables. Las ecuaciones están desacopladas, luego se estudian por separado. Por ejemplo,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_0 e^{-2t} = 0$  para cualquier condición inicial  $y_0$ . La ecuación de la componente  $x(t)$  se estudia como la ecuación logística. Las cuencas de atracción de los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son los semiplanos  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1/2\}$  y  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1/2\}$ , respectivamente. Los puntos situados sobre la recta  $\{x = 1/2\}$  son los únicos que tienden al punto de equilibrio intermedio.

4. (Método de Liapounov) Usando la función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , estudiar la estabilidad entorno al origen de los siguientes SNLs:

$$\begin{aligned} a) & \begin{cases} x' &= y - 3x^3 \\ y' &= -x - 7y^3 \end{cases} \\ b) & \begin{cases} x' &= -x + (x + y)^2 x \\ y' &= -y^3 + (x + y)^2 y^3 \end{cases} \\ c) & \begin{cases} x' &= -x^3 + 4xy^2 \\ y' &= -4y^3 \end{cases} \\ d) & \begin{cases} x' &= 2x^3 - 2y^3 \\ y' &= 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases} \end{aligned}$$

¿Se puede determinar por linealización la estabilidad entorno al origen en algún apartado?

La linealización no decide la estabilidad en ningún caso: el primer sistema linealizado es un centro, mientras que los otros son sistemas lineales degenerados sin VAPs positivos.

- AE, pues  $W(x, y) = -3x^4 - 7y^4$  es definida negativa en el origen.
- AE, pues  $W(x, y) = ((x + y)^2 - 1)(x^2 + y^4)$  es definida negativa en el origen.
- E, pues  $W(x, y) = -(x^2 - 2y^2)^2$  es semi-definida negativa en el origen.
- I, pues  $W(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2$  es definida positiva en el origen.

5. (Ajustando la función de Liapounov) Estudiar la estabilidad entorno al origen del SNL

$$\begin{cases} x' &= xy^2 + \mu x^3 \\ y' &= -2x^2y + \mu y^3 \end{cases}$$

Indicación: Usar una función del tipo  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ .

Derivando,  $W(x, y) = (2a - 4b)x^2y^2 + 2\mu(ax^4 + by^4)$ . Si tomamos  $a = 2$  y  $b = 1$ , queda  $W(x, y) = 2\mu(ax^4 + by^4)$ , luego: Si  $\mu > 0$ ,  $W(x, y)$  es definida positiva y el origen es I; si  $\mu < 0$ ,  $W(x, y)$  es definida negativa y el origen es AE; y si  $\mu = 0$ ,  $W(x, y) \equiv 0$  y el origen es E pero no AE, pues  $W(x, y)$  es una integral primera del sistema. Aquí tampoco se puede aplicar el método de linealización, pues la matriz del sistema linealizado es nula.

6. (Pb1 Junio 2007) Calcular los cuatro puntos críticos del SNL plano cuadrático

$$\begin{cases} x' &= xy + 12 \\ y' &= x^2 + y^2 - 25 \end{cases}.$$

Clasificar el SL asociado a cada punto crítico y estudiar por linealización la estabilidad del SNL en cada punto crítico.

7. (Pb2 Enero 1997) El origen es un punto de equilibrio del SNL plano

$$\begin{cases} x' &= y + \alpha x^3 \\ y' &= -x/4 + \mu y + 2\alpha y^5 \end{cases} .$$

- Calcular y clasificar el SL entorno al origen en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\mu$ .
- Estudiar, cuando  $\mu \neq 0$ , la estabilidad del SNL por el método de linealización.
- Estudiar, suponiendo  $\mu = 0$ , la estabilidad del SNL por el método de Liapounov usando una función de la forma  $V(x, y) = ax^2 + by^2$ .
- ¿Para qué valores de los parámetros podemos asegurar que el SNL es estable pero no asintóticamente estable entorno al origen?

8. (Pb1 Junio 2006) Consideramos la ecuación de segundo orden

$$x'' + (\alpha + 3x^2)x' + x = 0,$$

donde  $\alpha \geq 0$  es un parámetro real.

- Probar que si definimos  $y = x' + \alpha x + x^3$ , entonces la ecuación anterior se transforma en el sistema no lineal 2D de primer orden

$$\begin{cases} x' &= y - \alpha x - x^3 \\ y' &= -x \end{cases} .$$

- El origen es un punto de equilibrio del SNL. Calcular y clasificar su sistema linealizado.
- Estudiar la estabilidad del SNL en el origen por el método de linealización.
- Usando la función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , estudiar la estabilidad del SNL en el origen por el método de Liapounov para  $\alpha = 0$ .

9. (Sistema de Lorenz; Wikipedia: Lorenz attractor) Consideramos el sistema no lineal 3D

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= x(\rho - z) - y \\ z' &= xy - \beta z \end{cases}$$

donde  $\sigma, \rho, \beta > 0$  son parámetros del sistema. Por ejemplo,  $\sigma$  es el *número de Prandtl* y  $\rho$  es el *número de Rayleigh*. Para simplificar, supondremos que  $\rho > 1$ .

- Calcular los tres puntos de equilibrio del sistema de Lorenz.
- Estudiar la estabilidad del sistema de Lorenz entorno al origen.
- ¿Qué aspecto tienen sus trayectorias cerca del origen?

Nota: En este sistema 3D, las coordenadas  $(x, y, z)$  no tienen el significado espacial estándar.

- Los tres puntos críticos son el origen y  $(\pm a, \pm a, b)$ , con  $a = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$  y  $b = \rho - 1$ .
- La matriz del sistema linealizado entorno al origen es

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

cuyos tres VAPs son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Como  $\lambda_1 > 0$ , el origen es inestable.

- El origen es una silla, con una dimensión inestable (de salida) y dos dimensiones estables (de entrada). El eje vertical es una recta de entrada. Las trayectorias cerca del origen no giran, pues todos los VAPs son reales.

10. (Pb? Junio 1999) Queremos estudiar la estabilidad del SNL plano

$$\begin{cases} x' &= x(1-y) \\ y' &= y(x-1) \end{cases}$$

entorno al punto crítico  $(1, 1)$ . Probar que existe un valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que la función  $V(x, y) = \alpha + x + y - \ln x - \ln y$  es definida positiva en ese punto. ¿Se puede afirmar que el SNL no es asintóticamente estable entorno ese punto crítico? ¿Por qué?

$V(1, 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ . Para probar que la función  $V(x, y)$  es definida positiva en  $(1, 1)$ , basta escribir que  $V(x, y) = h(x) + h(y)$  y notar que la función  $h(s) = s - 1 - \ln s$  decrece en el intervalo  $(0, 1)$ , se anula en  $s = 1$  y crece en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

La derivada temporal de la función  $V(x, y)$  es idénticamente nula, por tanto el punto es  $E$ , pero no  $AE$ , ya que todas las trayectorias del SNL están contenidas en las curvas de nivel de la función  $V(x, y)$ , las cuales rodean al punto crítico, sin acercarse ni alejarse de él.

11. (Pb3 Enero 2009) El origen es un punto de equilibrio del sistema no lineal 3D

$$\begin{cases} x'_1 &= \alpha x_1^3 - 2x_2 + x_2x_3 \\ x'_2 &= \alpha x_2^3 + x_1 - x_1x_3 \\ x'_3 &= \alpha x_3^3 + x_1x_2 \end{cases}$$

siendo  $\alpha$  un parámetro real.

- Estudiar, si es posible, la estabilidad del origen por el método de linealización.
- Estudiar la estabilidad del origen por el método de Liapounov usando una función de la forma

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2}{2},$$

para algunos valores apropiados de  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ .

- Sea  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  la solución del sistema anterior que se obtiene al fijar la condición inicial

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 1.$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  es decreciente la función  $x_2(t)$  en  $t = 0$ ? ¿Y para cuáles es creciente? ¿Para qué valores de  $\alpha$  tiene un mínimo local la función  $x_2(t)$  en  $t = 0$ ? ¿Y para cuáles tiene un máximo local?

- Los VAPs de la matriz del sistema linealizado son  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$  y  $\lambda_3 = 0$ . Por tanto, la linealización no decide la estabilidad del sistema no lineal en el origen, pues todos los VAPs tienen parte real nula.
- Tomando  $c_2 = 2c_1$ ,  $c_3 = c_1$  y  $c_1 > 0$  arbitrario, queda que  $W(x_1, x_2, x_3) = \alpha c_1(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$  es definida positiva si  $\alpha > 0$ , definida negativa si  $\alpha < 0$ , e idénticamente nula si  $\alpha = 0$ . Por tanto, el origen es:  $I$  si  $\alpha > 0$ ,  $AE$  si  $\alpha < 0$  y  $E$  pero no  $AE$  si  $\alpha = 0$ .
- Como  $x'_2(0) = \alpha x_2^3(0) + x_1(0) - x_1(0)x_3(0) = 8\alpha$ , distinguimos tres casos.
  - $\alpha > 0 \Rightarrow x'_2(0) > 0 \Rightarrow x_2(t)$  es creciente en  $t = 0$ ;
  - $\alpha < 0 \Rightarrow x'_2(0) < 0 \Rightarrow x_2(t)$  es decreciente en  $t = 0$ ; y
  - $\alpha = 0 \Rightarrow x'_2(0) = 0$ , luego necesitamos más derivadas:

$$\begin{aligned} x'_1(0) &= -2x_2(0) + x_2(0)x_3(0) = -2 \\ x'_3(0) &= x_1(0)x_2(0) = -2 \\ x''_2(0) &= x'_1(0) - x'_1(0)x_3(0) - x_1(0)x'_3(0) = -2. \end{aligned}$$

Como  $x''_2(0) < 0$ , resulta que  $x_2(t)$  tiene un máximo local en  $t = 0$ .

12. (Sistema de Rössler; Pb3 Junio 2010) Consideramos el sistema de Rössler

$$\left. \begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x + ay \\ z' &= (x - b)z + c \end{aligned} \right\}.$$

Es un sistema no lineal 3D que depende de tres parámetros reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

- Calcular los puntos críticos del sistema cuando  $a \neq 0$ . El número de puntos críticos depende de los parámetros. Por ejemplo, hay uno si  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = 1$ ; dos si  $a = 1$ ,  $b = 5$  y  $c = 4$ ; y ninguno si  $a = b = c = 1$ .
- Calcular el único punto crítico del sistema cuando  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ . Estudiar, para los valores de  $b \neq 0$  en que sea posible, su estabilidad por el método de linealización.
- Calcular los infinitos puntos críticos del sistema cuando  $a = b = c = 0$ . Estudiar la estabilidad del sistema no lineal por el método de linealización en todos los puntos críticos donde sea posible.
- Supongamos que  $a > 0$  y  $b = c$ . Si una trayectoria parte de un punto del plano  $x = b$  tal que  $y \neq 0$ , ¿inicialmente se acerca o aleja del origen?

- Las puntos críticos cumplen  $x = -ay$ ,  $z = -y$  y  $ay^2 + by + c = 0$ .
- Cuando  $a = 0$ , el origen es el único punto crítico y el polinomio característico de su matriz linealizada es  $Q_A(\lambda) = -(\lambda + b)(\lambda^2 + 1)$ . Si  $b < 0$ , existe un VAP positivo y el SNL es inestable en el origen; pero si  $b \geq 0$ , la linealización no decide la estabilidad del SNL en el origen.
- Cuando  $a = b = c = 0$ , existen infinitos puntos críticos:  $(0, y_0, -y_0)$ ,  $y_0$  libre. El polinomio característico de la matriz del sistema linealizado es  $Q_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1 - y_0)$ . Por tanto, si  $y_0 > 1$ , existe un VAP positivo y el SNL es inestable en  $(0, y_0, -y_0)$ . De lo contrario, la linealización no decide la estabilidad del SNL.
- $V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$  cuantifica la distancia al origen. Usando que  $x = b = c$  vemos que  $\frac{dV}{dt} = ay^2 > 0$ , luego la trayectoria se aleja del origen.



## Modelos

1. (Superficie vs volumen) ¿Qué relación existe entre el volumen  $V(r) = 4\pi r^3/3$  y la superficie  $S(r) = 4\pi r^2$  de una esfera de radio  $r$ ? ¿Y en un cubo de arista  $l$ ? ¿Y en una geometría arbitraria de diámetro  $d$ ?

*En la esfera,  $V'(r) = S(r)$ . En el cubo,  $S(l) = 6l^2$  y  $V(l) = l^3$ , luego  $S(l)/V'(l) \equiv 2$ . En general, la superficie y el volumen dependen de forma cuadrática y cúbica del diámetro del objeto, luego, una vez fijada la forma del objeto, existen unas constantes  $S_1$  y  $V_1$  tales que  $S(d) = S_1 d^2$  y  $V(d) = V_1 d^3$ . Entonces, el cociente  $S(d)/V'(d) \equiv S_1/3V_1$  es constante.*

2. (Compuestos granulares) Depositamos en un tanque de agua un compuesto soluble granulado esféricamente. Cuando las condiciones de temperatura y concentración varían poco, es razonable suponer que (la masa de) cada grano se disuelve con una tasa de variación proporcional a su superficie. Sea  $k > 0$  la constante de proporcionalidad y  $\rho$  la densidad del compuesto. Escribir la ecuación diferencial que satisface el radio  $r(t)$  de un grano. ¿Qué pasará si los granos tienen forma cúbica? ¿Cuáles son las unidades de  $k$ ?

*La ecuación es  $r' = -k/\rho$  y la solución general es  $r(t) = r_0 - kt/\rho$ . Es decir, el radio de cada grano decrece a velocidad constante. En el caso de los granos cúbicos, la arista  $l = l(t)$  cumple la ecuación diferencial  $l' = -2k/\rho$ . En el S.I. las unidades de  $k$  son  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ , pues  $k$  cuantifica la masa disuelta por unidad de tiempo y superficie.*

3. (Desintegración radioactiva) La desintegración de una partícula inestable (esto es, radioactiva) es un proceso aleatorio que no puede ser predecido, pero se sabe que esta desintegración es igualmente probable en todos los instantes. Por tanto, dada una muestra de un isótopo radioactivo, el número de desintegraciones en un momento dado es proporcional al número de átomos radioactivos existentes en ese momento.

Sea  $\lambda$  la constante de proporcionalidad, que recibe el nombre de *constante de desintegración*. Plantear la ecuación que cumple el número de átomos  $N(t)$ .

La *semivida*  $t_{1/2}$  es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales. Relacionar  $t_{1/2}$  y  $\lambda$ .

En el enlace [http://www.walter-fendt.de/ph14s/lawdecay\\_s.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14s/lawdecay_s.htm) se puede visualizar este fenómeno mediante un applet de JAVA.

*La ecuación es  $N' = -\lambda N$  y su solución general es  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ , siendo  $N_0$  el número de átomos iniciales. La relación es  $\lambda t_{1/2} = \ln 2$ .*

4. (Datación por Carbono-14) Una muestra de carbón de la cueva de Lascaux daba, en 1950, una media de 0.97 desintegraciones de  $^{14}\text{C}$  por minuto y gramo, mientras que en árboles vivos suele ser de 6.68. Estimar la fecha en que se hicieron las pinturas rupestres de Lascaux. La semivida del  $^{14}\text{C}$  es (aproximadamente) de  $5730 \pm 40$  años.

*La fecha aproximada es  $5730(\ln 6,68 - \ln 0,97)/\ln 2 = 15951$  años antes de 1950. Es decir, unos 14000 años A.C.*

5. (Airbus A380) El avión de transporte de pasajeros Airbus A380 tiene un peso en vacío de 276.8 toneladas, su carga típica es de 66.4 toneladas y puede despegar con hasta 248 toneladas de combustible. Cuando alcanza su velocidad de crucero (900 kilómetros por hora), consume 28 kilogramos de combustible por tonelada de peso y hora. Suponiendo que siempre debe quedar una reserva de 30 toneladas de combustible para el despegue, aterrizaje y por seguridad, ¿cuál es su rango de vuelo máximo con la carga típica?

Sea  $P_0 = 276,8 + 66,4 = 343,2$  el peso en vacío más la carga típica y  $c_0 = 248$ . Sean  $c(t)$  y  $P(t) = P_0 + c(t)$  el peso del combustible y el peso del avión en el instante  $t$ . Entonces,  $P' = -0,028P$ , luego  $P(t) = P(0)e^{-0,028t}$  y así  $c(t) = P(t) - P_0 = (P_0 + c_0)e^{-0,028t} - P_0$ . Finalmente, la solución de la ecuación  $c(t_*) = 30$  es  $t_* \simeq 16,43$  horas y el rango de vuelo es  $r_* = 900t_* \simeq 14787$  kilómetros.

6. (Depósito de salmuera) Un depósito semivacío contiene  $V_0$  metros cúbicos de salmuera con una concentración de  $c_0$  kilogramos de sal por metro cúbico. Para llenarlo le enviamos un caudal de  $r_{in}$  metros cúbicos por segundo con una concentración de sal de  $c_{in}$  kilogramos por metro cúbico y, simultáneamente, abrimos la salida para extraer un caudal de  $r_{out}$  metros cúbicos por segundo. Los caudales  $r_{out}$  y  $r_{in}$  pueden ser diferentes. Como en todos nuestros modelos de disoluciones, mezclas y contaminantes, supondremos que concentración de sal en el depósito es aproximadamente uniforme y es la misma que la concentración de salida.

Calcular el volumen  $V(t)$  del depósito en el instante  $t$ . Plantear la ecuación diferencial que satisface la cantidad de sal  $s(t)$ . Plantear el PVI que cumple la concentración  $c(t)$ . ¿Cuándo son autónomas ambas ecuaciones? Usando la intuición física, calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ .

$V(t) = V_0 + (r_{in} - r_{out})t$ . Como  $s(t) = V(t)c(t)$  y  $s'(t) = r_{in}c_{in} - r_{out}c(t)$ , vemos que

$$s' = r_{in}c_{in} - r_{out}s/V(t).$$

Después, derivando la relación  $s(t) = V(t)c(t)$ , obtenemos el PVI

$$c' = r_{in}(c_{in} - c)/V(t), \quad c(0) = c_0.$$

Ambas ecuaciones son autónomas si y sólo si el volumen  $V(t)$  se mantiene constante; es decir, cuando coinciden los caudales de entrada y salida. Finalmente, la concentración del depósito tiende a igualarse con la concentración de entrada:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = c_{in}$ .

7. (Modelo de Malthus) Sea  $x(t)$  el tamaño de una población aislada que dispone de recursos y alimento ilimitados. El modelo de Malthus consiste en suponer que el ritmo de crecimiento de la población es, en cada instante, proporcional al tamaño de la población. Sea  $k > 0$  la constante de proporcionalidad. Escribir y resolver la ecuación diferencial resultante.

Supongamos que  $x(1800) = 0,978 \times 10^9$  y  $x(1900) = 1,65 \times 10^9$ . ¿Cuánto vale  $x(2000)$ ?

La ecuación es  $x' = kx$  y su solución general es  $x(t) = x_0e^{kt}$ , siendo  $x_0$  la población inicial. La predicción es  $x(2000) = 2,78 \times 10^9$ , aunque la población mundial en 2000 fue  $\approx 6 \times 10^9$ .

8. (Modelo de Verhulst o ecuación logística) Los recursos no son ilimitados, luego vamos a modificar el modelo de Malthus suponiendo que la constante de proporcionalidad  $k$  decrece linealmente en  $x$ . Concretamente, vamos a suponer que  $k = k(x)$  es una función lineal que cumple  $k(0) = k_0$  y  $k(m) = 0$  para algún  $m > 0$ . Calcular la función  $k(x)$ . Escribir la ecuación diferencial del nuevo modelo. Esta ecuación se llama *ecuación logística*. Interpretar  $m$  y  $k_0$ .

La función es  $k(x) = k_0(1 - x/m)$  y su gráfica es una recta que corta a los ejes en los puntos  $(0, k_0)$  y  $(m, 0)$ . La ecuación diferencial resultante es

$$x' = k(x)x = k_0x(1 - x/m).$$

En este contexto,  $m$  es la población máxima que pueden sostener los recursos existentes (se denomina capacidad de carga), y  $k_0$  es la tasa inherente de crecimiento per cápita.

9. (Estatocolector estelar o Bussard ramjet) El estatocolector de Bussard es un optimista diseño de nave estelar que ha aparecido en múltiples libros de CF (Niven, Benford, . . .) y también es conocido por los trekkies. Consiste en una nave cilíndrica que en la proa, mediante un gigantesco campo magnético, va capturando materia estelar que después es fusionada y expulsada en chorro por la popa, impulsando así la nave. Su gran ventaja es que no hace falta transportar combustible. Consultar la entrada inglesa de Wikipedia.

La fuerza de impulsión generada en cada instante por los “motores” de esta hipotética nave es igual a la masa de materia estelar capturada por unidad de tiempo multiplicada por la diferencia entre la velocidad  $v_c$  del chorro de partículas expulsadas y la velocidad  $v(t)$  de la nave. Escribir, sin tener en cuenta efectos relativistas, la ecuación diferencial que cumple  $v(t)$ . Identificar la ecuación.

*La ecuación es  $mv' = \rho Sv(v_c - v)$ , donde  $m$  es la masa de la nave,  $\rho$  es la densidad de la materia estelar en el espacio y  $S$  es la superficie barrida por campo magnético de la nave. Es una ecuación logística, pues  $v_c$  es una constante.*

10. (Ecuación del paracaidista) Se supone que la fricción que frena la caída de un paracaidista es proporcional a la velocidad al cuadrado. Sea  $k > 0$  la constante de proporcionalidad,  $g$  la intensidad de la gravedad y  $m$  la masa del paracaidista. Escribir la ecuación diferencial que cumple la velocidad  $v(t)$ , tomando el sentido de caída como positivo. Calcular la *velocidad terminal*  $v_\infty$  del paracaidista; es decir, la velocidad de caída tal que se compensan las fuerzas de fricción y gravedad.

En [www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html) hay un applet de JAVA para simular la caída de un paracaidista.

*La ecuación es  $mv' = mg - kv^2$  y la velocidad terminal es  $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ . Un paracaidista es bueno cuando tiene una  $k$  grande y, además, no se rompe.*

11. (Cuerpo cayendo en un fluido) Tenemos un cuerpo de masa  $m$  y volumen  $V$  dentro de un medio líquido, sometido a la acción de la gravedad  $g$ , al empuje del fluido sobre el cuerpo (Arquímedes) y a una fuerza de fricción proporcional a  $v^\alpha$ , siendo  $v$  la velocidad y  $\alpha > 0$  un exponente desconocido. Tomando el sentido de caída como sentido positivo, escribir la ecuación que gobierna el comportamiento de  $v(t)$ .

*La ecuación es  $mv' = (mg - V) - kv^\alpha$ .*

12. (Método “Montgomery Burns” para eliminar residuos nucleares) Este problema es un reto para los que sepan resolver EDOs con MATLAB. No forma parte del temario de la asignatura.

Durante algunos años, la AEC (United States Atomic Energy Commission) almacenaba los residuos nucleares en bidones de masa  $m = 240$  kilogramos y volumen  $V = 0,2$  metros cúbicos que lanzaba periódicamente al mar en zonas de  $h = 100$  metros de profundidad. Al mismo tiempo, un grupo de ingenieros comprobó, después de muchos experimentos, que los bidones se podían romper si llegaban al fondo con una velocidad superior a los 12 metros por segundo.

Comprobar numéricamente, para varios valores del exponente  $\alpha > 0$  antes mencionado, si esta forma de actuar es propia de un gobierno responsable o de un personaje de dibujos animados. No recomendado para corazones débiles. (Hoy en día está prohibido lanzar residuos nucleares al mar en USA, para gran disgusto de Mr. Burns.)

13. (Reacción química simple) Dos productos  $A$  y  $B$  reaccionan formando otro producto  $C$ . Es razonable suponer (¿por qué?) que la tasa de creación de  $C$  es proporcional al producto de las cantidades de  $A$  y  $B$  presentes. Se sabe que la formación de  $C$  requiere dos kilogramos de

A por cada kilogramo de  $B$ . Inicialmente, disponemos de diez kilogramos de producto  $A$  y veinte de  $B$ . Plantear la ecuación diferencial de la masa  $m_C(t)$  de producto  $C$  y determinar su rango de validez; es decir, el intervalo en el que tiene sentido físico que se mueva  $m_C$ .

*La ecuación es  $m'_C = k(10 - 2m_C/3)(20 - m_C/3)$ , donde  $k > 0$  es una constante de proporcionalidad. El rango es  $0 \leq m_C \leq 15 = \min(15, 60)$ .*

14. (Vela solar) Otro diseño de propulsión más realista son las velas solares que utilizan los fotones del viento solar para impulsarse. La NASA está actualmente desarrollando velas solares. Consultar la entrada inglesa de Wikipedia (solar sail). El impulso de una vela solar es proporcional al número de fotones que impactan sobre ella. Escribir la ecuación diferencial que cumple la distancia  $d(t)$  de la vela al sol, despreciando la fricción. Al alejarse del sol, menos fotones impactan en la vela, luego la velocidad de la vela va disminuyendo... ¿es correcto este "razonamiento"?

*La ecuación es  $md'' = k/d^2$ , donde  $m$  es la masa de la vela y  $k > 0$  es una constante de proporcionalidad, pues la cantidad de fotones es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. No, pues  $d''(t) > 0$  implica que  $d'(t)$  es estrictamente creciente; la vela va cada vez más rápido, aunque se puede comprobar que tiende a una "velocidad terminal".*

15. (Principio de Arquímedes & Eliminación de parámetros físicos) Una caja de altura  $h_{cj}$  y densidad  $d$  flota en aguas tranquilas con pequeñas oscilaciones. Sea  $h(t)$  la altura sumergida en el instante  $t$  y  $h_{eq}$  la altura sumergida en la *posición de equilibrio*. Calcular  $h_{eq}$ . Determinar, despreciando los términos de fricción, la ecuación diferencial que cumple  $h(t)$ . Ídem para la función  $x(t) = h(t) - h_{eq}$ . Ídem para la función  $y(s) = x(t)$  con  $s = \omega t$  y  $\omega^2 = g/h_{eq}$ , donde  $g$  denota la aceleración de la gravedad.

En <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=266.0> se puede visualizar el movimiento oscilatorio de la caja mediante un applet de JAVA.

*$h_{eq} = h_{cj}d$ . Las ecuaciones son  $h'' + gh/h_{eq} = g$ ,  $x'' + \omega^2 x = 0$  y  $y'' + y = 0$ .*

16. (Muelle vertical con fricción) Colgamos una masa  $m$  de un muelle vertical cuya *constante de Hooke* es  $\lambda$ . El medio ofrece una resistencia igual a  $\mu$  veces la velocidad instantánea. Sean  $x_c(t)$  y  $x_s(t)$  las desviaciones de la masa desde las posiciones de equilibrio del muelle con y sin masa, respectivamente. Relacionarlas y plantear la ecuación que cumple cada una.

*La relación es  $x_s(t) = x_c(t) + mg/\lambda$ . Las EDOs son  $mx_c'' + \mu x_c' + \lambda x_c = 0$  y  $mx_s'' + \mu x_s' + \lambda x_s = mg$ .*

17. (Muelle vertical con fricción, bis; Pb1 Enero 2009) Volvemos al problema anterior del muelle vertical, tomando  $m = 1/2$  kilogramos,  $\lambda = 3/2$  Newtons por metro y  $\mu = 2$  Newtons por metro por segundo. Recordamos que la ecuación diferencial que modela la dinámica es

$$mx'' + \mu x' + \lambda x = 0$$

siendo  $x(t)$  el desplazamiento desde la posición de equilibrio con masa en el instante  $t$ .

- ¿Qué tipo de oscilación es?
- Resolver el PVI correspondiente a impulsar la masa desde la posición de equilibrio con velocidad inicial  $v_0$ .
- Calcular la aceleración inicial de la masa. Calcular el instante  $t_* > 0$  en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo. Calcular el valor del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración de la masa en el instante  $t_*$ . Expresar los resultados de forma exacta.

- a) Tenemos la oscilación amortiguada libre  $x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0$  con  $k = \mu/2m = 2$  y  $\omega_0^2 = \lambda/m = 3$ . Por tanto, estamos en el caso sobreamortiguado:  $k > \omega$ .
- b) Las c.i. son  $x(0) = 0$  y  $x'(0) = v_0$ . La solución del PVI asociado es  $x(t) = v_0(e^{-t} - e^{-3t})/2$ .
- c) La aceleración inicial es igual a  $x''(0) = -4x'(0) - 3x(0) = -4v_0$ . La solución anterior vale cero inicialmente, tiende a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$  y tiene un único punto crítico en el instante  $t = t_* = (\ln 3)/2$ . El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en ese instante valen  $x(t_*) = v_0/3\sqrt{3}$ ,  $x'(t_*) = 0$  y  $x''(t_*) = -4x'(t_*) - 3x(t_*) = -v_0/\sqrt{3}$ , respectivamente.

18. (Péndulo con fricción) Tenemos un péndulo de masa  $m$  y longitud  $l$  sometido a un campo gravitatorio de intensidad  $g$ . Sea  $k$  el coeficiente de fricción proporcional a la velocidad. Comprobar que la ecuación que modela el movimiento del péndulo es

$$\theta'' + a\theta' + c \sin \theta = 0,$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo formado por el péndulo con la vertical inferior. Expresar las cantidades positivas  $a$  y  $c$  en función de los parámetros físicos del problema. ¿Cuáles son las unidades de  $a$ ? ¿Qué datos necesitamos para formar un PVI?

$a = k/m$  y  $c = g/l$ . Unidades inversas de tiempo. La posición y velocidad iniciales.

19. (Péndulo con fricción, bis; Pb3 Junio 2009) La ecuación que modela el movimiento de un péndulo en un medio resistente es

$$\theta'' + a\theta' + c \sin \theta = 0,$$

donde  $a = k/m > 0$  es el cociente entre la fuerza la resistencia que ofrece el medio y la masa del péndulo, mientras que  $c = g/l > 0$  es el cociente entre la fuerza de la gravedad y la longitud del péndulo.

- a) Escribir esta ecuación como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ .
- b) Estudiar, si es posible, la estabilidad de las dos posiciones de equilibrio del péndulo por el método de linealización.
- c) Comprobar que la energía mecánica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{m}{2} l^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

no crece a lo largo de las trayectorias. ¿A lo largo de qué trayectorias se mantiene constante la energía?

d) Deducir que el péndulo con fricción no tiene ninguna trayectoria periódica no constante. En <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/pendulum/pen.html> se puede visualizar un péndulo forzado con fricción mediante un applet de JAVA. No es muy estético, pero es el único que he encontrado.

20. (Campos conservativos con un grado de libertad; Pb3 Enero 2010) El movimiento de una partícula de masa uno que se desplaza sin fricción sobre una recta bajo la acción de una fuerza  $F(x)$  cumple la EDO de segundo orden

$$x'' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Escribir esta EDO de segundo orden como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad lineal  $v = x'$ .
- b) La energía (cinética más potencial) de la partícula es igual a

$$E(x, v) = v^2/2 + U(x),$$

donde  $U(x) = \int_{x_0}^x F(s) ds$  es la energía potencial de la partícula. La posición  $x_0$  es nuestra elección del origen de la energía potencial:  $U(x_0) = 0$ .

Calcular la derivada respecto al tiempo de la energía. ¿Qué relación existe entre las soluciones del sistema y las curvas de nivel de la energía? Deducir que si en algún momento la partícula tiene energía  $E_0$ , su energía potencial nunca supera el valor  $E_0$ .

- c) Sea  $F(x) = 4x(1 - x^2)$  la fuerza que proviene del potencial  $U(x) = -x^2(2 - x^2)$ . ¿Puede escapar la partícula a más o menos infinito? ¿Por qué? Calcular las tres posiciones de equilibrio de la partícula, la energía de cada una y la estabilidad de cada una. Decidir el método a usar en cada caso. ¿Qué les pasa a las partículas que tienen la misma energía que alguna de las tres posiciones de equilibrio?

Indicacion: Dibujar la gráfica del potencial y las curvas de nivel de la energía.

21. (Péndulo de Wilberforce) Una masa colgando de un muelle flexible en forma de espiral puede oscilar en modo longitudinal (arriba y abajo) o torsional (girando), existiendo un pequeño acoplamiento entre estos dos tipos de movimiento. En Youtube se pueden ver péndulos así.

Sean  $y(t)$  y  $\theta(t)$  los desplazamientos desde la posición de equilibrio en estos dos modos. Es decir,  $y(t)$  mide las oscilaciones verticales mientras que  $\theta(t)$  mide las torsionales. Sea  $m$  la masa y  $I$  su momento de inercia. Sean  $\omega^2$  y  $\nu^2$  las constantes longitudinal y torsional de Hooke del muelle. Supondremos que el acoplamiento entre los dos tipos de movimiento consiste en que la “influencia” que cada uno de ellos ejerce sobre el otro es proporcional a su propio desplazamiento, con una constante de proporcionalidad común. Plantear, despreciando las fuerzas de fricción, las dos ecuaciones de segundo orden del movimiento, para después transformarlas en un sistema lineal formado por cuatro ecuaciones de primer orden.

Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} my'' + \omega^2 y &= \epsilon \theta \\ I\theta'' + \nu^2 \theta &= \epsilon y \end{cases}$$

donde  $\epsilon$  es la pequeña constante de proporcionalidad común. Introduciendo las nuevas funciones incógnita  $z = y'$  y  $\Omega = \theta'$ , transformamos ese par de ecuaciones en el sistema lineal de primer orden

$$\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -\omega^2 y/m + \epsilon \theta/m \\ \theta' &= \Omega \\ \Omega' &= -\nu^2 \theta/I + \epsilon y/I \end{cases}$$

22. (Pulsación en el péndulo de Wilberforce, Lebovitz pág. 96) Una masa colgando de un muelle flexible en forma de espiral puede oscilar en modo vertical ( $y$ ) o torsional ( $\theta$ ). Despreciando las fuerzas de fricción, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} my'' + \omega_0^2 y &= \epsilon \theta \\ I\theta'' + \nu_0^2 \theta &= \epsilon y \end{cases}$$

donde  $m$ ,  $I$ ,  $\omega_0$  y  $\nu_0$  son parámetros positivos del sistema, mientras que  $\epsilon$  es una cantidad pequeña. Para simplificar, supondremos que  $m = I = 1$ ,  $\nu_0 = \omega_0$  y  $|\epsilon| < \omega_0^2$ .

Estudiar la estabilidad entorno al origen. Después, probar que existen unas frecuencias  $\omega_+$  y  $\omega_-$  tales que las funciones

$$y(t) = \cos(\omega_+ t) \cos(\omega_- t), \quad \theta(t) = \sin(\omega_+ t) \sin(\omega_- t)$$

son la solución del PVI formado por las ecuaciones del péndulo y las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0.$$

Probar que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_+ = \omega_0$  y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_- = 0$ . Interpretar físicamente el resultado como una transferencia “pulsante” de energía entre los dos modos de movimiento.

(No es fácil, ver <http://people.cs.uchicago.edu/~lebovitz/Eodesbook/lc.pdf>)

23. (Grandes Lagos) Queremos estudiar la evolución en la concentración de un contaminante en los lagos Eire y Ontario, conectados por un río que fluye del primero al segundo. Sean  $V_E$

y  $V_O$  los volúmenes respectivos, en millas cúbicas. Sean  $r_E$  y  $r_O$  los respectivos caudales de salida, en millas cúbicas por año. Se cumple que  $r_O > r_E$ , pues el lago Ontario recibe todo lo que sale del lago Eire y algo más. Sean  $e_E$  y  $e_O$  las concentraciones de contaminantes que entran a cada lago desde el exterior, en kilogramos por milla cúbica. Sean  $c_E(t)$  y  $c_O(t)$  las concentraciones de contaminantes que hay en cada lago en el instante  $t$ .

Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que cumplen las funciones  $c_E(t)$  y  $c_O(t)$ . ¿Es un sistema lineal? Usando la intuición, y sin resolver el sistema, ¿a qué tenderán estas concentraciones cuando  $t \rightarrow +\infty$ ? ¿Cómo se pueden interpretar los cocientes  $p_E = r_E/V_E$  y  $p_O = r_O/V_O$ ? Finalmente, calcular la solución general al fijar los valores (Google):

$$V_E = 116, \quad V_O = 393, \quad r_E = 85, \quad r_O = 99.$$

(En realidad, los Grandes Lagos son cinco: Superior, Michigan, Hurón, Eire y Ontario. El modelo completo se encuentra en el libro “An Introduction to Mathematical Modeling” de E.A. Bender o en el PDF <http://www.ma1.upc.edu/~edis/lakes.pdf> de S. McKelvey.)

La cantidad de contaminante que entra en el lago Eire es  $r_{EE}e_E$  y la que sale es  $r_{EC}c_E(t)$ . La cantidad de contaminante que entra por unidad de tiempo en el lago Ontario es  $r_{EC}c_E(t) + (r_O - r_E)e_O$  y la que sale es  $r_{OC}c_O(t)$ . Por tanto, obtenemos el sistema lineal a coeficientes constantes

$$\begin{cases} c'_E &= r_E(e_E - c_E)/V_E \\ c'_O &= ((r_O - r_E)e_O + r_{EC}c_E - r_{OC}c_O)/V_O \end{cases}.$$

Las concentraciones tenderán a igualarse con las respectivas concentraciones de entrada. Es decir, tenderán a  $e_E$  en el lago Eire y a  $(r_{EE}e_E + (r_O - r_E)e_O)/r_O$  en el lago Ontario. Los cocientes  $p_E$  y  $p_O$  podrían interpretarse como la proporción de agua que se renova en un año en cada lago, aunque no es exactamente así. Finalmente, la solución general obtenida con los valores “googleados” es

$$c_E(t) = c_1 e^{-p_E t} + e_E, \quad c_O(t) = c_1 \alpha e^{-p_E t} + c_2 e^{-p_O t} + (85e_E + 14e_O)/99.$$

donde  $p_E = 85/116 \approx 0,73$ ,  $p_O = 33/131 \approx 0,25$  y  $\alpha = \frac{r_{EC}p_O}{r_O(p_O - p_E)} = -9860/21921 \approx -0,45$ . Observamos que contra mayores son  $p_E$  y  $p_O$ , más rápido se estabilizan las concentraciones de contaminantes. ¿Es lógico?

#### 24. (Pb1 Junio 2010)

- a) Resolver la EDO lineal no homogénea de primer orden a coeficientes constantes

$$c'(t) + pc(t) = q,$$

donde  $p > 0$  y  $q \in \mathbb{R}$ . Calcular el límite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$  en función de  $p$  y  $q$ .

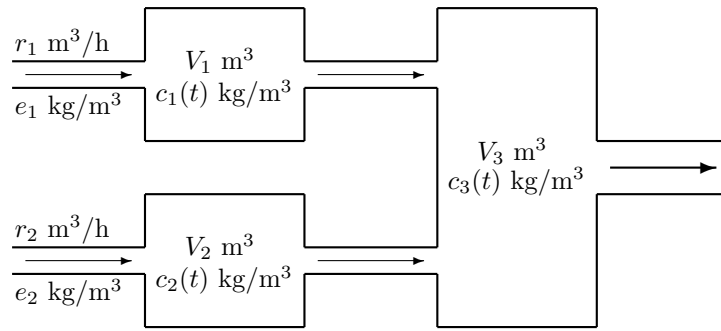
- b) Resolver la EDO lineal no homogénea de primer orden a coeficientes constantes

$$c'(t) + pc(t) = \beta e^{-lt},$$

donde  $l, p > 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ . Distinguir los casos  $l \neq p$  y  $l = p$ . Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ .

- c) Estudiamos la evolución de la concentración de sal en tres depósitos conectados según la figura adjunta de forma que sus volúmenes  $V_1, V_2, V_3$  (metros cúbicos) se mantienen constantes, y las entradas a los dos primeros depósitos tienen caudales  $r_1$  y  $r_2$  (metros cúbicos por hora) y concentraciones  $e_1$  y  $e_2$  (kilogramos por metro cúbico). ¿Cuáles son los tres caudales de salida? Sean  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  las concentraciones de sal en el instante  $t$ . Plantear el sistema de EDOs lineales no homogéneas de primer orden a coeficientes constantes que cumplen estas concentraciones.
- d) Usar los primeros apartados para calcular los límites de las tres concentraciones cuando el tiempo tiende a infinito en función de los caudales y concentraciones de entrada. Comprobar que no dependen de las concentraciones que hay inicialmente en los depósitos. Interpretar estos límites físicamente.

- a) La solución general es  $c_g(t) = q/p + ke^{-pt}$ , con  $k \in \mathbb{R}$  libre, luego  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_g(t) = q/p$ .



- b) Si  $l \neq p$ ,  $c_g(t) = ke^{-pt} + \beta e^{-lt}/(p-l)$ . Si  $l = p$ ,  $c_g(t) = (k + \beta t)e^{-pt}$ . En ambos casos,  $k \in \mathbb{R}$  es libre y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_g(t) = 0$ .
- c) Los caudales de salida son  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3 = r_1 + r_2$ . Las cantidades de sal relacionadas con los dos primeros depósitos en el instante  $t$  son las siguientes:  $V_j c_j(t)$  en el interior,  $r_j e_j$  entrada por unidad de tiempo y  $r_j c_j(t)$  salida por unidad de tiempo. Por tanto,  $V_j c_j'(t) = r_j e_j - r_j c_j(t)$ . Así pues, obtenemos las EDOs lineales de primer orden

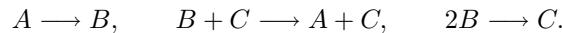
$$c_j'(t) + p_j c_j(t) = q_j, \quad p_j = r_j/V_j, \quad q_j = e_j p_j, \quad j = 1, 2.$$

Las cantidades en el tercer depósito son:  $V_3 c_3(t)$  en el interior,  $r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t)$  entrada por unidad de tiempo y  $r_3 c_3(t)$  salida por unidad de tiempo. Por tanto,  $V_3 c_3'(t) = r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t) - r_3 c_3(t)$ . Así pues, obtenemos la EDO lineal de primer orden

$$c_3'(t) + p_3 c_3(t) = r_1 c_1(t)/V_3 + r_2 c_2(t)/V_3, \quad p_3 = r_3/V_3.$$

- d)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_1(t) = e_1$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_2(t) = e_2$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_3(t) = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/(r_1 + r_2)$ . Es decir, la concentración en los dos primeros depósitos tiende a igualarse a la concentración de sus únicas entradas, pues fluyen con concentración constante, mientras que la concentración del tercer depósito tiende a una media ponderada de las concentraciones límite de sus dos entradas. Los coeficientes que cuantifican la ponderación son los respectivos caudales de entrada.

25. (Reacción química triple) En una reacción química con tres productos  $A$ ,  $B$  y  $C$  tienen lugar simultáneamente los procesos



Supondremos, al igual que en la reacción química simple del problema anterior, que la *tasa de reacción* de cada proceso es proporcional al producto de las concentraciones (en moles por litro) de los productos necesarios para que se lleve a cabo ese proceso concreto. Sean  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  las tres constantes de proporcionalidad. Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que cumplen las concentraciones  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$ . ¿Cuál es la concentración de cada producto en el *equilibrio químico*? ¿Es estable?

(En las páginas 190–192 del libro “An Introduction to Mathematical Modeling” de E.A. Bender se presenta un modelo mejor, aunque más complicado.)

Las concentraciones cumplen el sistema no lineal autónomo

$$\begin{cases} x_1' &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 x_3 \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 x_3 - k_3 x_2^2 \\ x_3' &= k_3 x_2^2 \end{cases}.$$

En el equilibrio sólo hay producto  $C$  y es un equilibrio estable ya que  $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0$  (la cantidad total de los tres productos no varía), pero en cambio  $x_3' = k_3 x_2^2 \geq 0$  (la cantidad de producto  $C$  nunca descende). Reto: Intentar aplicar el método de linealización.

26. (Modelo depredador-presa o Lotka-Volterra, Dawkins pág. 311) Sean  $x(t)$  y  $y(t)$  los tamaños de las poblaciones de dos especies aisladas de presas y depredadores. Suponemos que las interrelaciones entre estas especies cumplen los siguientes principios:

- Si no hay depredadores, la población de presas crece exponencialmente (Malthus).
- Si no hay presas, la población de depredadores decrece exponencialmente.
- El número de encuentros entre un depredador y una presa es proporcional al producto de las dos poblaciones.
- Cada encuentro entre depredador y presa incrementa la población de depredadores y disminuye la población de presas.

Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que modela el problema. ¿Es lineal?

*El sistema de Lotka-Volterra es  $x' = ax - bxy = x(a - by)$ ,  $y' = dxy - cy = y(dx - c)$ , siendo  $a, b, c, d > 0$  las constantes de proporcionalidad que representan la interacción entre las especies. Es un sistema no lineal, debido a los términos cuadráticos  $xy$ .*

27. (Retrato de fases de Lotka-Volterra) Consideramos el SNL plano

$$\begin{cases} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(dx - c) \end{cases}$$

donde las cantidades  $a, b, c$  y  $d$  son parámetros positivos. El origen es un punto de equilibrio.

- Calcular, clasificar y dibujar un croquis del sistema linealizado entorno al origen.
- Encontrar el otro punto de equilibrio del SNL. Calcular, clasificar y dibujar un croquis del sistema linealizado entorno al segundo punto de equilibrio.
- Determinar, si es posible, la estabilidad en el sistema no lineal de los puntos de equilibrio por el método de linealización.
- Calcular explícitamente la trayectoria del SNL que parte de la condición inicial

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0$$

situada sobre el eje de abscisas. Ídem, pero con la condición inicial

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0$$

situada sobre el eje de ordenadas. ¿Es invariante el primer cuadrante? Es decir, ¿Una trayectoria del SNL que empieza en el primer cuadrante, puede abandonar dicho cuadrante? Explicar el porqué.

- Consideramos la función

$$V(x, y) = x^\gamma y^\alpha e^{-(\delta x + \beta y)}$$

donde las cantidades  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son parámetros estrictamente positivos. Hallar los valores que deben tomar estos parámetros (en función de  $a, b, c$  y  $d$ ) para que  $V(x, y)$  sea una integral primera del SNL. Es decir, para que

$$\frac{d}{dt} \{V(x(t), y(t))\} = 0$$

para toda trayectoria  $(x(t), y(t))$  del sistema no lineal.

- Dibujar el retrato de fases global de este SNL.

En la página 69 del libro *Notes on Differential Equations* de Bob Terrell publicado en el enlace <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/dn.pdf> podeis ver el retrato de fases cuando  $a = b = c = d = 1$ , en cuyo caso queda un sistema del tema anterior, aparecido en el examen de junio de 1999. Podeis restringir los cálculos a estos valores unitarios.

28. (Dos especies competitivas) Sean ahora  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  los tamaños de las poblaciones de dos especies aisladas que compiten por un recurso limitado. Supondremos que, en ausencia de una de las poblaciones, la población de la otra se rige por el modelo de Verhulst (ecuación logística). Entonces, el modelo cuando compiten las dos poblaciones es

$$\begin{cases} x'_1 &= k_1 x_1 (1 - (x_1 + p_{12} x_2)/m_1) \\ x'_2 &= k_2 x_2 (1 - (p_{21} x_1 + x_2)/m_2) \end{cases} .$$

Interpretar biológicamente los parámetros  $k_1, k_2, m_1, m_2, p_{12}, p_{21}$ . ¿Son positivos?

*Por comparación con el modelo de Verhust para una población,  $k_j$  representa la tasa inherente de crecimiento per cápita y  $m_j$  es la capacidad de carga de la especie  $j$ , en ausencia de la otra especie. Todos son positivos. Finalmente,  $p_{ij}$  representa el efecto que tiene la especie  $j$  sobre la especie  $i$ . También son positivos, pues las especies compiten.*

29. (Pescando platelmintos) Un biólogo con amplios conocimientos en sistemas dinámicos (!) tiene una muestra de líquido que contiene varias especies diferentes de “platelmintos fototrópicos” que siempre nadan en dirección a la luz más cercana. Cada especie nada a una velocidad diferente. Para aislar y extraer la especie que nada a velocidad  $v$ , el biólogo coloca el líquido en un recipiente cilíndrico (una cuba) transparente de radio  $r$ . A continuación, hace girar el recipiente con velocidad angular  $\omega$  situándolo enfrente de una única fuente luminosa. Los platelmintos nadan en dirección a la luz, en contra del sentido de giro de la cuba.

Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que cumple la trayectoria  $(x(t), y(t))$  de los platelmintos al trabajar en coordenadas cartesianas, situando el centro de la cuba en el origen y la fuente luminosa en el punto  $(r, 0)$ . ¿Por qué es necesario imponer que  $v < \omega r$ ? ¿Existe algún punto de estancamiento? Es decir, ¿existe alguna posición tal que los platelmintos situados en ella permanecen “estancados”?

Indicación: La velocidad de cada platelminto es la suma de la velocidad de arrastre (debida a la rotación de la cuba) más la velocidad propia al intentar llegar al punto  $(r, 0)$ .

*El sistema no lineal autónomo es*

$$\begin{cases} x' &= -\omega y + \frac{v(r-x)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}} \\ y' &= \omega x - \frac{vy}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}} \end{cases}$$

*El término  $(-\omega y, \omega x)$  proviene de la rotación de la cuba. El término  $\frac{v(r-x, -y)}{\sqrt{(r-x)^2+y^2}}$  representa el avance de los platelmintos hacia el punto luminoso. Imponemos la condición  $v < \omega r$  para que los platelmintos no puedan “engancharse” a la luz. Existe un único punto de estancamiento.*

30. (Retrato de fases del sistema “Pescando platelmintos”) Dos de los parámetros del sistema anterior se pueden eliminar, dando lugar al SNL

$$\begin{cases} x' &= -y + \frac{\epsilon(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} \\ y' &= x - \frac{\epsilon y}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} \end{cases}$$

que está bien definido para todo  $(x, y) \neq (1, 0)$  y tan sólo contiene un parámetro  $\epsilon \in (0, 1)$ .

- Sabiendo que para todo  $\epsilon \in (0, 1)$  existe un único punto fijo  $(\bar{x}, \bar{y})$  tal que  $\bar{y} = \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}$ , calcular la abscisa  $\bar{x}$  en función de  $\epsilon$ . Comprobar que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{x} = 0$  y  $\lim_{\epsilon \rightarrow 1} \bar{x} = 1$ .
- Calcular la matriz del sistema linealizado entorno al punto fijo  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Comprobar que el determinante de la matriz no depende de  $\epsilon$ .
- Clasificar el sistema linealizado anterior en función de  $\epsilon$ .
- ¿Qué se puede decir de la estabilidad del sistema no lineal a partir de los cálculos del apartado anterior?
- Cuando el punto fijo es un foco, ¿en qué sentido giran las trayectorias cercanas a él: horario o anti-horario? Razonar la respuesta.
- ¿Para qué condiciones iniciales  $(x, y) \neq (1, 0)$  empieza alejándose del origen  $(0, 0)$  la trayectoria del sistema no lineal que pasa por el punto  $(x, y)$  en el instante  $t = 0$ ? ¿Y cuando empieza acercándose? (Indicación: Estudiar el signo de la derivada temporal de la función  $V(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ . La respuesta no depende de  $\epsilon$ .)

(No es fácil, ver [http://www.ma1.upc.edu/~edis/pescando\\_platelmintos.pdf](http://www.ma1.upc.edu/~edis/pescando_platelmintos.pdf).)

## EDPs

1. (Teoría Junio 2009) Escribir la ecuación de ondas 1D. Escribir la ecuación del calor 1D. El cambio de variables  $u(x, t) = e^{w(x, t)}$  transforma la EDP no lineal de segundo orden  $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$  en una ecuación de ondas 1D o en una ecuación del calor 1D. Decir en cuál de las dos y probarlo.

*Las ecuaciones de ondas y calor 1D están en los apuntes. Necesitamos calcular las derivadas parciales de la “nueva” función  $u(x, t)$  en función de las derivadas parciales de la “vieja” función  $w(x, t)$ . Aplicando repetidamente la regla de la cadena, vemos que*

$$\begin{aligned} u_x &= w_x e^w, \\ u_{xx} &= (w_{xx} + (w_x)^2) e^w, \\ u_t &= w_t e^w = (w_{xx} + (w_x)^2) e^w = u_{xx}. \end{aligned}$$

*En la última igualdad hemos usado la EDP  $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$ . Por tanto, la “nueva” función  $u(x, t)$  cumple una ecuación del calor.*

2. (Teoría Junio 2004)
- Escribe la ecuación de la cuerda vibrante infinita. ¿Qué condiciones iniciales se necesitan para poder aplicar la fórmula de D’Alembert? Interpretar estas condiciones desde el punto de vista físico.
  - Escribe la ecuación de Laplace en la región cuadrada de lado dos centrada en el origen cuyos lados son paralelos a los ejes con las siguientes condiciones de Dirichlet: el valor de la función en cada punto de la frontera es igual a la distancia del punto al centro del cuadrado. ¿Se necesitan condiciones iniciales? ¿Por qué?
  - Escribe la ecuación del calor en una barra de longitud  $\pi$ , con condiciones de Neumann homogéneas y tal que la temperatura inicial sea constante e igual a uno.
3. (Una ley de conservación en Calor 1D) Sea  $u(x, t)$  una solución del PVI con condiciones de Neumann homogéneas

$$\begin{cases} u_t = \kappa^2 u_{xx} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \\ u_x(0, t) = 0 & & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & & t > 0 \end{cases} .$$

Probar que la función  $T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$  es constante e interpretarlo físicamente.

*Basta probar que la derivada de la función  $T(t)$  es igual a cero:*

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x, t) dx = \frac{\kappa^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) dx = \frac{\kappa^2}{L} [u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} = 0.$$

*Las propiedades que hemos usado son: derivada bajo el signo de la integral (primera igualdad), la ecuación del calor (segunda), el teorema fundamental del cálculo (tercera) y las condiciones de frontera (cuarta).*

La interpretación física es que el calor se conserva, pues no puede escaparse por los extremos, luego la temperatura promedio en la barra  $T(0) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$  se mantiene constante.

4. (Una ley de “disipación” en Calor 1D, Test Junio 2002 & Test Junio 2007) Sea  $u(x, t)$  una solución del PVI con condiciones de Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} u_t = \kappa^2 u_{xx} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \\ u(0, t) = 0 & & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & & t > 0 \end{cases} .$$

Probar que la función  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx$  nunca es creciente. ¿Cuándo es constante? ¿Y cuándo es estrictamente decreciente? Interpretar físicamente el resultado.

Basta probar que la derivada de la función  $E(t)$  nunca es positiva:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= \kappa^2 \int_0^L u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= \kappa^2 [u(x, t) u_x(x, t)]_{x=0}^{x=L} - \kappa^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \\ &= -\kappa^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Las propiedades que hemos usado son: derivada bajo el signo de la integral (primera igualdad), la ecuación del calor (segunda), una integración por partes (tercera) y las condiciones de frontera (cuarta). Además,  $E'(t) \equiv 0 \Leftrightarrow u_x(x, t) \equiv 0 \Leftrightarrow u(x, t) \equiv 0$ . Es decir, la función  $E(t)$  es estrictamente decreciente, excepto si la temperatura es constante (regimen estacionario).

La interpretación física es que como el calor fluye libremente por los extremos —teniendo estos una temperatura cero fija—, la temperatura en el interior tiende al equilibrio térmico determinado por las condiciones de contorno.

5. (Conservación de la energía en Ondas 1D) Dada una solución  $u(x, t)$  de la ecuación  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , definimos su *densidad de energía* y su *flujo de energía* como las funciones

$$e(x, t) = \frac{u_t^2(x, t)}{2c^2} + \frac{u_x^2(x, t)}{2}, \quad f(x, t) = -u_t(x, t) u_x(x, t),$$

respectivamente. Probar que  $e_t + f_x = 0$ .

- a) Sea  $u(x, t)$  una solución del PVI con condiciones de Neumann homogéneas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L & \\ u_x(0, t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \\ u_x(L, t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Probar que la *energía total* de la cuerda vibrante

$$E(t) := \int_0^L e(x, t) dx = \frac{1}{2c^2} \int_0^L u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2(x, t) dx$$

es constante.

- b) Encontrar otras condiciones de frontera, que no sean las Neumann homogéneas, que también conserven la energía.  
c) Expresar la energía inicial en función de la posición y velocidad iniciales.

Derivamos la densidad de energía:  $e_t = u_t u_{tt}/c^2 + u_x u_{xt} = u_t u_{xx} + u_x u_{tx} = -f_x$ .

a) Basta probar que la derivada de  $E(t)$  es igual a cero:

$$E'(t) = \int_0^L e_t(x, t) dx = - \int_0^L f_x(x, t) dx = f(0, t) - f(L, t) = 0.$$

b)  $E'(t) = f(0, t) - f(L, t) = 0 \Leftrightarrow u_t(0, t)u_x(0, t) = u_t(L, t)u_x(L, t)$ . Por tanto, otra posibilidad es poner condiciones Dirichlet constantes, pues entonces  $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$ .

c) La energía inicial es  $E(0) = \frac{1}{2c^2} \int_0^L g^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L (f'(x))^2 dx$ . El primer término es la energía cinética y el segundo es la energía elástica.

6. (Pb4 Enero 2009) Sea  $u(x, t)$  una solución de la ecuación del calor 1D con condiciones de contorno mixtas (Dirichlet en el extremo izquierdo y Neumann en el extremo derecho)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (0, \pi) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & & t > 0 \end{cases} .$$

a) Encontrar una expresión de la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$$

que sólo dependa de  $u_x(0, t)$ .

b) Calcular la solución  $u(x, t)$  cuando la temperatura inicial es  $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$ .

Indicación: Podéis usar que el PVF resultante sólo tiene FUPs trigonométricas y también podéis usar la fórmula trigonométrica

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

c) Probar que la función  $T(t)$  obtenida para  $f(x) = 2 \sin(x/2) \cos x$  tiene un mínimo global en el instante  $t_* = (\ln 3)/2$  y tiende a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

a)  $T'(t) = -u_x(0, t)/\pi$ .

b)  $u(x, t) = e^{-9t/4} \sin(3x/2) - e^{-t/4} \sin(x/2)$ .

c)  $T'(t) = (1 - 3e^{-2t})e^{-t/4}/2\pi$  se anula en  $t = t_*$ , es negativa si  $t < t_*$  y positiva si  $t > t_*$ .

7. (Principio de superposición en la cuerda vibrante infinita, Pb2 Septiembre 1994) Queremos resolver el problema

$$(U) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

a) Probar que si  $v(x, t)$  es una solución de

$$(V) \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y  $w(x, t)$  es una solución de

$$(W) \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = F(x, t) & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ w(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} ,$$

entonces  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  es una solución de (U).

b) Resolver el problema (V) con  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 1$  y  $c = 1$ .

- c) Buscar una solución del problema ( $W$ ) con  $F(x, t) = (t^2 + 2) \sin x$  y  $c = 1$  que tenga la forma  $w(x, t) = T(t) \sin x$ .
- d) Dar una solución del problema original ( $U$ ) con  $F(x, t) = (t^2 + 2) \sin x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 1$  y  $c = 1$ .

- a) Es una comprobación teórica simple.
- b) Aplicando la fórmula de D'Alembert vemos que  $v(x, t) = (\sin(x - t) + \sin(x + t))/2 + t$ .
- c) Necesitamos resolver la EDO  $T'' + T = t^2 + 2$  con las c.i.  $T(0) = T'(0) = 0$ . La solución de este PVI es  $T(t) = t^2$ , luego  $w(x, t) = t^2 \sin x$ .
- d) Finalmente,  $u(x, t) = (\sin(x - t) + \sin(x + t))/2 + t + t^2 \sin x$ .

8. (Homogeneizar la EDP, Pb2 Enero 2003) Queremos resolver el problema

$$(U) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x + \sin t & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

- a) Encontrar una solución particular  $w(x)$ , que no dependa del tiempo, de  $u_{tt} - u_{xx} = \cos x$ .
- b) Encontrar una solución particular  $z(t)$ , que no dependa de la posición, de la ecuación  $u_{tt} - u_{xx} = \sin t$ .
- c) Probar que el cambio  $v(x, t) = u(x, t) - w(x) - z(t)$  transforma el problema ( $U$ ) en el problema de valor inicial

$$(V) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Calcular las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

- d) Resolver el problema ( $V$ ) y, a continuación, deducir la solución del problema original ( $U$ ).

9. (Pb4 Junio 2009) Vamos a resolver una ecuación de ondas 1D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas mediante dos métodos diferentes para compararlos.

- a) Calcular, aplicando la fórmula de D'Alembert, la solución del PVI

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función  $f(x) = 2 \sin x$  y la cuerda está inicialmente en reposo. Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Continuando con una cuerda inicialmente en reposo, ¿qué propiedades debe tener la posición inicial  $f(x)$  para poder asegurar que la solución del PVI obtenida mediante la fórmula de D'Alembert cumple esas dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet?

- b) Calcular, aplicando el método de separación de variables, la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función  $f(x) = 2 \sin x$

(Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene FUPs trigonométricas.)

c) Comprobar que las soluciones obtenidas en los apartados anteriores coinciden.

La solución es  $u(x, t) = \sin(x + ct) + \sin(x - ct) = 2 \cos(ct) \sin x$ . La función  $f(x)$  que fija la posición inicial debe ser impar y  $2\pi$ -periódica.

10. (Calor 1D en una barra con condiciones de Dirichlet constantes) Consideramos el problema

$$(*) \begin{cases} u_t - \kappa^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) & \\ u(0, t) = \alpha & & t > 0 \\ u(L, t) = \beta & & t > 0 \end{cases} .$$

a) Encontrar unas funciones  $v(x)$  y  $g(x)$  tales que el cambio de variables  $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$  transforme el problema (\*) en el problema

$$(\Delta) \begin{cases} w_t - \kappa^2 w_{xx} = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ w(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) & \\ w(0, t) = 0 & & t > 0 \\ w(L, t) = 0 & & t > 0 \end{cases} .$$

Expresar  $v(x)$  y  $g(x)$  en términos de las cantidades  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $L$  y de la función  $f(x)$ .

- b) Siguiendo el método de separación de variables, imponer que  $w(x, t) = X(x)T(t)$  cumpla la EDP y las condiciones de frontera (es decir, la parte homogénea) del problema  $(\Delta)$ . Escribir claramente el PVF asociado a la función  $X(x)$  y el problema asociado a la función  $T(t)$ .
- c) Resolver el PVF asociado a la función  $X(x)$ .
- d) Teniendo en cuenta los VAPs del PVF anterior, resolver el problema asociado a la función  $T(t)$ .
- e) Calcular las FUPs de la parte homogénea del problema  $(\Delta)$ .
- f) Probar que, a nivel formal, la solución del problema (\*) cumple  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = v(x)$ .
- g) Interpretar físicamente estos resultados.

En <http://www-math.mit.edu/daimp/HeatEquation.html> se puede visualizar el fenómeno de la temperatura límite o “steady state” mediante un applet de JAVA. Problema resuelto en los apuntes del tema colgados en <http://www.ma1.upc.edu/~edis/edp.pdf>.

11. (Pb4 Junio 2010; calor 1D en un anillo) Consideramos el PVI de calor 1D con condiciones de contorno “periódicas”

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (-L, L) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-L, L) & \\ u(-L, t) = u(L, t) & & t > 0 \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t) & & t > 0 \end{cases} .$$

En esta formulación la variable  $x$  se mueve sobre una circunferencia de longitud  $2L$ . Así pues, las posiciones  $x = -L$  y  $x = L$  representan el mismo punto de la circunferencia. Por tanto, temperatura y flujo coinciden en esas posiciones.

a) Dada una solución  $u(x, t)$  del PVI, calcular la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx.$$

- b) Encontrar los equilibrios térmicos del problema. Es decir, las temperaturas que cumplen la EDP y las condiciones de contorno, pero que no dependen del tiempo.
- c) Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$  en función de  $f(x)$ .

Indicación: Suponiendo que conocemos el desarrollo de Fourier

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)$$

de la temperatura inicial, imponer directamente que la serie formal

$$u(x, t) = \alpha_0(t)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

cumpla el PVI, sin seguir el método de separación de variables, pues es demasiado largo.

- d) Interpretar físicamente los resultados obtenidos. ¿Se tiende más rápidamente al límite anterior cuándo la longitud  $L$  del alambre es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuándo la constante  $k^2$  es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuándo el índice  $n$  del modo normal es grande o pequeño?

a)  $T'(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{2L} \int_{-L}^L u_{xx}(x, t) dx = k^2(u_x(L, t) - u_x(-L, t))/2L = 0.$

b) *Los únicos equilibrios térmicos son las temperaturas constantes.*

c) *La solución formal del PVI es*

$$u(x, t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(k\pi n/L)^2 t} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)).$$

*Finalmente,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = a_0/2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ , pues las exponenciales tienen a cero.*

- d) *Interpretaciones: 1) La temperatura promedio se mantiene constante (no hay extremos, luego el calor no se escapa); 2) El calor tiende a distribuirse uniformemente, luego la temperatura tiende a un valor constante (equilibrio térmico); y 3) Ese valor constante coincide con el promedio de la temperatura inicial. Los exponentes  $-(k\pi n/L)^2$  de las exponenciales son más negativos, luego se tiende más rápido al límite, cuanto mayores son la constante  $k^2$  y el índice  $n$ , y cuanto menor es la longitud  $L$ .*

12. (Poisson 2D en un rectángulo con condiciones de Dirichlet) Consideramos el problema

$$(*) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2y & x \in (0, \pi) & y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(x, 2\pi) = 2\pi x^2 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 1 & y \in (0, 2\pi) \end{cases}.$$

- a) Encontrar unas funciones  $v(x, y)$  y  $g(y)$  tal que el cambio de variables  $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$  transforme el problema (\*) en el problema

$$(\Delta) \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) & y \in (0, 2\pi) \\ w(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ w(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ w(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ w(\pi, y) = g(y) & y \in (0, 2\pi) \end{cases}.$$

- b) Siguiendo el método de separación de variables, imponer que  $w(x, y) = X(x)Y(y)$  cumpla la ecuación de Laplace y las tres condiciones de frontera homogéneas del problema  $(\Delta)$ . Escribir claramente el PVF asociado a la función  $Y(y)$  y el problema asociado a la función  $X(x)$ .
- c) Resolver el PVF asociado a la función  $Y(y)$ .
- d) Teniendo en cuenta los VAPs del PVF anterior, resolver el problema asociado a la función  $X(x)$ .
- e) Calcular las FUPs de la parte homogénea del problema  $(\Delta)$ .
- f) Resolver el problema original (\*).

(Resuelto en los apuntes del tema colgados en <http://www.ma1.upc.edu/~edis/edp.pdf>.)

13. (Ondas 1D con condiciones de Dirichlet homogéneas) Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, L) & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(L, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

suponiendo que el desarrollo de Fourier de la posición inicial es  $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)$ . Aplicar el resultado al caso  $L = \pi$  y  $f(x) = \sin^3 x$ .

La solución es  $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \cos(n\pi ct/L) \sin(n\pi x/L)$ . Si  $L = \pi$  y  $f(x) = \sin^3 x$ , entonces  $u(x, t) = \frac{3}{4} \sin x \cos ct - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3ct$ , pues  $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$ .

14. (Ondas 1D con fricción y condiciones de Neumann homogéneas) Consideramos el problema

$$(*) \begin{cases} u_{tt} + \mu u_t - c^2 u_{xx} = 0 & x \in (-\pi, \pi) & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (-\pi, \pi) \\ u_x(-\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u_x(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

- Seguindo el método de separación de variables, imponer que  $u(x, t) = X(x)T(t)$  cumpla la EDP, la condición de velocidad inicial y las condiciones de frontera (es decir, la parte homogénea) del problema. Escribir claramente el PVF asociado a la función  $X(x)$  y el problema asociado a la función  $T(t)$ .
- Resolver el PVF asociado a la función  $X(x)$ .
- Teniendo en cuenta los VAPs del PVF anterior, resolver el problema asociado a la función  $T(t)$ .
- Calcular las FUPs de la parte homogénea del problema.
- Estudiar el límite cuando  $t \rightarrow +\infty$  de la solución  $u(x, t)$ .
- Resolver el problema completo cuando la posición inicial de la cuerda es
  - $f(x) = \cos x + 2 \cos^2 x$ .
  - $f(x) = 1 + \sin(3x/2)$ .

(No es fácil, consultar [http://www.ma1.upc.edu/~edis/ondas1D\\_friccion\\_Neumann.pdf](http://www.ma1.upc.edu/~edis/ondas1D_friccion_Neumann.pdf).)

15. (Pb2 Junio 2001) Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t = x^2 u_{xx} + x u_x & 1 < x < e & t > 0 \\ u(x, 0) = 7 \cos(2\pi \ln x) & 1 < x < e \\ u_x(1, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(e, t) = 0 & t > 0 \end{cases}.$$

Indicación: La EDO del PVF es de tipo Cauchy-Euler.

La solución de este problema sólo tiene un modo normal:  $u(x, t) = 7e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi \ln x)$ .

16. (Pb2 Septiembre 1991)

- a) Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}/2 & 0 < x < \pi & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}.$$

b) Dado un parámetro  $\delta \in (0, 1)$ , resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} (1 - \delta^2)v_{tt} + 2v_t = v_{xx} & 0 < x < \pi & t > 0 \\ v(x, 0) = \sin x & 0 < x < \pi & \\ v_t(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi & \\ v(0, t) = 0 & & t > 0 \\ v(\pi, t) = 0 & & t > 0 \end{cases} .$$

c) Calcular  $\lim_{\delta \rightarrow 1} v(x, t)$  y compararlo con  $u(x, t)$ .

a) La solución del primer problema sólo tiene un modo normal:  $u(x, t) = e^{-t/2} \sin x$ .

b) La solución del segundo problema también tiene un único modo normal:

$$v(x, t) = \left( (\delta + 1)e^{-t/(1+\delta)}/2\delta + (\delta - 1)e^{-t/(1-\delta)}/2\delta \right) \sin x, \quad 0 < \delta < 1.$$

c)  $\lim_{\delta \rightarrow 1} v(x, t) = u(x, t)$ , ya que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{-t/\epsilon} = 0$  para todo  $t > 0$ .

17. (Principio del máximo y mínimo en Calor 1D) Sea  $u(x, t)$  una solución continua para toda posición  $x \in [-\pi, \pi]$  y para todo tiempo  $t \geq 0$  del problema

$$\begin{cases} u_t = \kappa^2 u_{xx} & -\pi < x < \pi & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 - \pi^2 & -\pi < x < \pi & \\ u(-\pi, t) = \sin t & & t > 0 \\ u(\pi, t) = te^{-t} & & t > 0 \end{cases} .$$

Calcular los valores máximo y mínimo de esta solución.

La temperatura inicial abarca el rango  $[-\pi^2, 0]$ . La temperatura en el extremo izquierdo, el rango  $[-1, 1]$ . Y la del extremo derecho, el rango  $[0, 1/e]$ . Por tanto,  $M = 1$  es el valor máximo y  $m = -\pi^2$  es el valor mínimo.

18. (Principio del máximo y mínimo en Poisson 2D) Consideramos la función

$$u(x, y) = a_0 + b_1x + b_2y + c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2$$

que depende de seis parámetros y sea  $\Omega$  un dominio acotado cualquiera del plano. ¿Para qué valores de los parámetros podemos afirmar que  $u(x, y)$  alcanza su valor máximo en  $\partial\Omega$ ? ¿Y el valor mínimo?

Derivando,  $u_{xx} + u_{yy} = 2(c_{11} + c_{22})$ . Así pues, cuando  $c_{11} + c_{22} \geq 0$ , la función  $u(x, y)$  es una solución continua de la ecuación de Poisson 2D en el dominio  $\Omega$  con un término no homogéneo no negativo y, por tanto, cumple el principio del máximo. Similarmente, si  $c_{11} + c_{22} \leq 0$ , cumple el principio de mínimo.

19. (Pb4 Enero 2010) Consideramos la ecuación de Laplace 2D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en el rectángulo  $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  dada por

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) & y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) & \\ u(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) & \\ u(0, y) = 0 & & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 0 & & y \in (0, 2\pi) \end{cases} .$$

a) Calcular la solución formal de este problema suponiendo que el desarrollo de Fourier en senos de  $f(x)$  en el intervalo  $(0, \pi)$  es  $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$ .

Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene FUPs trigonométricas.

b) Ahora consideramos las funciones  $f(x) = x(\pi - x)$  y  $f(x) = x$ . ¿Para cuál de ellas podemos asegurar que la solución  $u(x, y)$  no es continua en  $\bar{\Omega} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ? ¿Por qué? Sabiendo que en el otro caso la solución es continua en  $\bar{\Omega}$ , calcular sus valores máximo y mínimo sobre  $\bar{\Omega}$ .

a)  $u(x, y) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\sinh(n(2\pi - y))}{\sinh(2\pi n)} \sin nx.$

b) Si  $f(x) = x$ , la solución no es continua pues las condiciones de contorno no empalman bien en el vértice inferior derecho  $(x, y) = (\pi, 0)$ . Si  $f(x) = x(\pi - x)$ , aplicando el principio del máximo y del mínimo vemos que  $0 \leq u(x, y) \leq \pi^2/4$  para todo  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ .