Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 8 de abril de 2011 Depositado en `www.ma1.upc.edu/~edis/` Tiempo: 75 minutos

Apellidos, Nombre:

---

2 puntos. Dadas unas frecuencias no resonantes $\omega, \omega_0 > 0$ y unas constantes no nulas A y B, consideramos la oscilación

$$x'' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t + B.$$

1. ¿Qué tipo de oscilación es? Encontrar todas sus soluciones periódicas y decir cuáles son sus periodos.
2. Determinar todas las posibles condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ (en función de ω_0, ω, A y B) para las cuales la solución del PVI asociado a la oscilación anterior es periódica.

Solución:

1. Es una oscilación forzada no amortiguada. La EDO homogénea $x'' + \omega_0^2 x = 0$ es una oscilación harmónica y sabemos que su solución general es $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres. También sabemos que existe una solución particular de la EDO no homogénea de la forma $x_{\mathrm{p}}(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t + c_5$, donde los coeficientes $c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ se determinan imponiendo que $x_{\mathrm{p}}(t)$ cumpla la EDO no homogénea:
$$A \sin \omega t + B = x_{\mathrm{p}}''(t) + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}}(t) = (\omega_0^2 - \omega^2) c_3 \cos \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) c_4 \sin \omega t + \omega_0^2 c_5 \Rightarrow c_3 = 0,\ c_4 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2},\ c_5 = \frac{B}{\omega_0^2}.$$
Por tanto, la solución general es
$$x_{\mathrm{g}}(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{B}{\omega_0^2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Como ω y ω_0 son frecuencias no resonantes, las soluciones anteriores son cuasiperiódicas pero no periódicas, excepto la solución $\bar{x}(t) = x_{\mathrm{p}}(t)$ que se obtiene cuando $c_1 = c_2 = 0$, la cual es periódica de periodo $p = 2\pi/\omega$.
2. Debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones para EDOs lineales, basta evaluar la única solución periódica $\bar{x}(t)$ (y su primera derivada) en el instante $t = 0$:
$$x_0 = \bar{x}(0) = B/\omega_0^2, \qquad v_0 = \bar{x}'(0) = A\omega/(\omega_0^2 - \omega^2).$$

---

2 puntos. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema $X' = AX$ tal que

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es única esta matriz fundamental? Razonar la respuesta.

Solución: El polinomio característico de la matriz A es $Q_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$; sus VAPs son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -3$; y sus correspondientes VEPs son $\vec{v}_1 = (1,3)^t$ y $\vec{v}_2 = (1,-1)^t$. Por tanto, escribiendo las soluciones $\tilde{X}_j(t) = \mathrm{e}^{\lambda_j t} \vec{v}_j$, $j = 1, 2$, en columnas obtenemos la matriz fundamental

$$\tilde{\Phi}(t) = \big(\tilde{X}_1(t) | \tilde{X}_2(t)\big) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-3t} \\ 3\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz no cumple la condición que nos piden, pero sabemos que cualquier matriz de la forma $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t) S$, con S invertible, también es matriz fundamental. Por tanto, buscamos una matriz invertible S tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(0) = \tilde{\Phi}(0) S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} S \Longrightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t) S = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-3t})/4 & -\mathrm{e}^{-3t} \\ (3\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-3t})/4 & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$.

Finalmente, la matriz fundamental $\Phi(t)$ que se pide es única como consecuencia del teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales. Efectivamente, pues las columnas de la matriz $\Phi(t) = \big(X_1(t) | X_2(t)\big)$ son las únicas soluciones del sistema $X' = AX$ que cumplen las condiciones iniciales

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

2 puntos. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$. Sabiendo que la matriz A no diagonaliza, pero se transforma en su forma de Jordan J por el cambio de base S (es decir, $A = SJS^{-1}$), calcular <u>una</u> solución particular del sistema lineal no homogéneo $X' = AX + b(t)$.

Solución: El polinomio característico es $Q_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ y el VAP $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ es doble, luego la forma de Jordan es $J = J_2(2)$. Por tanto, la matriz principal del sistema $X' = AX$ es

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tJ}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

A continuación, buscamos una primitiva $U(t)$ del vector $\Psi^{-1}(t)b(t) = \mathrm{e}^{-tA}b(t)$:

$$U(t) = \int \mathrm{e}^{-tA} b(t) \mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $X_{\mathrm{p}}(t) = \Psi(t)U(t) = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$ es una solución particular (hay muchas otras).

---

2 puntos.

1. Dado un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, calcular la solución del PVI lineal
$$x'' - 4x' + 3x = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = \alpha.$$
2. La gráfica de la solución anterior pasa por el punto $(t, x) = (0, 1)$ para <u>todo</u> $\alpha \in \mathbb{R}$. Todas estas gráficas, ¿son transversales o tangentes en el punto $(t, x) = (0, 1)$? Justificar la respuesta.
3. La coincidencia en el punto $(t, x) = (0, 1)$ de todas las gráficas anteriores no contradice al teorema de existencia y unicidad de soluciones. ¿Por qué?

Solución:

1. Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Por tanto, la solución general de la EDO es $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ libres. Determinamos los coeficientes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales
$$\left.\begin{array}{l} 1 = x(0) = c_1 + c_2 \\ \alpha = x'(0) = c_1 + 3c_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow c_1 = (3-\alpha)/2,\ c_2 = (\alpha - 1)/2 \Longrightarrow x(t) = \frac{(3-\alpha)\mathrm{e}^t + (\alpha - 1)\mathrm{e}^{3t}}{2}.$$
2. La condición $x'(0) = \alpha$ determina la pendiente de cada gráfica en el punto $(t, x) = (0, 1)$. Por tanto, las gráficas se cruzan transversalmente, pues cada una de ellas tiene una pendiente diferente en el punto donde coinciden.
3. Porque la EDO es de segundo orden, luego necesitamos fijar tanto el valor $x(t_0)$ como la pendiente $x'(t_0)$ para poder aplicar el teorema de existencia y unicidad de soluciones. En cambio, los resultados explicados en el tema *Introducción* sobre la imposibilidad de que las gráficas de dos soluciones se toquen sólo valen para EDOs de primer orden, pues entonces basta fijar el valor de $x(t_0)$ para poder afirmar que la solución es única.

---

2 puntos.

1. Sea $m \in \mathbb{R}$ un parámetro. Calcular la solución general de la EDO lineal homogénea
$$x'' - 2mx' + m^2x = 0.$$
2. Calcular los <u>dos</u> valores de m para los cuales el PVF lineal homogéneo
$$x'' - 2mx' + m^2x = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0$$
tiene soluciones no triviales.

Solución:

1. Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2m\lambda + m^2 = (\lambda - m)^2$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = m$ (doble). Por tanto, las funciones $x_1(t) = \mathrm{e}^{mt}$ y $x_2(t) = t\mathrm{e}^{mt}$ forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general de la EDO es $x_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^{mt}(c_1 + c_2t)$, siendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ unos parámetros libres.
2. Imponemos las condiciones de frontera:
$$\left.\begin{array}{l} 0 = x'(0) = mc_1 + c_2 \\ 0 = x(1) + x'(1) = \mathrm{e}^m(c_1 + c_2 + mc_1 + mc_2 + c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} m & 1 \\ m+1 & m+2 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Por tanto, existen soluciones no triviales del PVF si y sólo el anterior sistema lineal homogéneo es compatible indeterminado. Es decir, si y sólo si $\det A = 0$. Finalmente, $0 = \det A = m^2 + m - 1 \Leftrightarrow m = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.
