Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 16 de abril de 2010 Depositado en `www.ma1.upc.edu/~edis/` Tiempo: 75 minutos

Apellidos, Nombre:

1.5 puntos. Consideramos las trayectorias del sistema no lineal 2D

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& y \\ y' &=& (1-x^2)y - x \end{array}\right\}.$$

1. Viendo que la velocidad en el origen es nula, ¿puede pasar una trayectoria por el origen <u>sin</u> quedarse allí? ¿Por qué?
2. Si la trayectoria parte de un punto de la recta $x = 1$, ¿<u>inicialmente</u> se mueve hacia arriba o hacia abajo?
3. Describir el lugar geométrico de los puntos (x, y) en los cuales el módulo de la velocidad de la trayectoria coincide con la distancia al origen.

Solución:

1. No. La trayectoria $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ es una solución del sistema, luego no puede existir otra solución que pase por el origen debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones.
2. Si $x = 1$, entonces $y' = -1 < 0$, luego trayectoria inicialmente se mueve hacia abajo.
3. El módulo de la velocidad en el punto (x, y) es $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + y(1 - x^2)((1 - x^2)y - 2x)}$. La distancia del punto (x, y) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, hemos de resolver la ecuación
$$y(1 - x^2)\big((1 - x^2)y - 2x\big) = 0.$$
El lugar geométrico de los puntos que cumplen la ecuación anterior está formado por la recta horizontal $y = 0$, las dos rectas verticales $x = \pm 1$ y la gráfica de la función $y = 2x/(1 - x^2)$.

2.5 puntos.

1. Resolver la EDO lineal homogénea a coeficientes constantes $x''' - x' = 0$.
2. Resolver la EDO lineal no homogénea a coeficientes constantes $x''' - x' = \cosh t$ aplicando el método de variación de parámetros.
3. Sea $z(t)$ una función que es la <u>suma</u> de una solución de la EDO $x''' - x' = \cosh t$ y una solución de la EDO $y''' - y' = \sinh t$. ¿Cuánto vale $z''' - z'$? Razonar la respuesta.

Indicación: $\cosh t = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$ y $\sinh t = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$.

Solución:

1. La tabla del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
0	1	1
1	1	e^t
-1	1	e^{-t}

luego la solución general de la EDO homogénea es $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{-t}$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.

2. Sabemos que existe una solución particular de la forma $x_{\mathrm{p}}(t) = u_1(t) + u_2(t)\mathrm{e}^t + u_3(t)\mathrm{e}^{-t}$, donde
$$u_k(t) = \int \frac{W_k(t)}{W(t)}\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, 3.$$
Aquí, $W(t)$ es el Wronskiano del conjunto fundamental de soluciones:
$$W(t) = W[1, \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}] = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$
mientras que $W_k(t)$ es el determinante que se obtiene al substituir la k-ésima columna del Wronskiano $W(t)$ por la columna $(0, 0, \cosh t)$. Calculando, vemos que
$$W_1(t) = -2\cosh t, \quad W_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\cosh t = 1/2 + \mathrm{e}^{-2t}/2, \quad W_3(t) = \mathrm{e}^t\cosh t = 1/2 + \mathrm{e}^{2t}/2.$$
Las primitivas correspondientes son:
$$\begin{array}{rcl} u_1(t) &=& -\int \cosh t \mathrm{d}t = -\sinh t \\ u_2(t) &=& \frac{1}{4}\int (1 + \mathrm{e}^{-2t})\mathrm{d}t = t/4 - \mathrm{e}^{-2t}/8 \\ u_3(t) &=& \frac{1}{4}\int (1 + \mathrm{e}^{2t})\mathrm{d}t = t/4 + \mathrm{e}^{2t}/8. \end{array}$$
Finalmente, $x_{\mathrm{p}}(t) = -\sinh t + t\mathrm{e}^t/4 - \mathrm{e}^{-t}/8 + t\mathrm{e}^{-t}/4 + \mathrm{e}^t/8 = \frac{t}{2}\cosh t - \frac{3}{4}\sinh t$, luego $x_{\mathrm{g}}(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{2}\cosh t - \frac{3}{4}\sinh t$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.

3. $z''' - z' = (x + y)''' - (x + y)' = (x''' - x') + (y''' - y') = \cosh t + \sinh t = \mathrm{e}^t$.

2.5 puntos.

1. Calcular la solución general real del sistema lineal homogéneo $X' = AX$, donde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
2. ¿Para qué valores $L > 0$ tiene soluciones no triviales el problema $X' = AX$, $x_1(0) = 0$, $x_2(L) = 0$?

Solución:

1. El polinomio característico de la matriz es $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, luego los VAPs son $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$ y los VEPs son
$$\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \mp \mathrm{i} \end{pmatrix} = \vec{u} \pm \vec{w}\,\mathrm{i}, \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Por tanto, usando la forma de Jordan real, vemos que
$$\Phi_{\mathbb{R}}(t) = S_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tJ_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t - \cos t & -(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^t$$
es una matriz fundamental real, luego la solución general real es
$$X_{\mathrm{h}}(t) = \Phi_{\mathbb{R}}(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1(\sin t - \cos t) - c_2(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Al imponer las condiciones de frontera, obtenemos el siguiente sistema lineal homogéneo 2×2:
$$\left. \begin{array}{l} 0 = x_1(0) = c_1 \\ 0 = x_2(L) = \big((\sin L - \cos L)c_1 - (\sin L + \cos L)c_2\big)\mathrm{e}^L \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\sin L - \cos L) & -(\sin L + \cos L) \end{pmatrix} \vec{c} = \vec{0}.$$
Así pues, como queremos que existan soluciones no triviales, necesitamos que se anule el determinante de la matriz del sistema, lo cual equivale a pedir que $\tan L = -1$. Las soluciones positivas de la ecuación $\tan L = -1$ son $L = L_n = 3\pi/4 + n\pi$, para $n \geq 0$.

1.5 puntos. Tenemos una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)$, con $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

1. Escribir la solución general de la EDO.
2. ¿Existe alguna solución que no sea acotada? Razonar la respuesta.
3. ¿Cuándo existen soluciones que son cuasiperiódicas, pero no periódicas? Mostrar, tras escoger unos valores adecuados de ω_1 y ω_2, algún ejemplo de solución cuasiperiódica pero no periódica.

Solución:

1. La tabla del polinomio $P(\lambda)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
0	2	$1, t$
$\pm\omega_1\,\mathrm{i}$	1	$\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)$
$\pm\omega_2\,\mathrm{i}$	1	$\cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t)$

luego la solución general de la EDO homogénea es
$$x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(\omega_1 t) + c_4 \sin(\omega_1 t) + c_5 \cos(\omega_2 t) + c_6 \sin(\omega_2 t), \qquad c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}.$$
2. Sí. Por ejemplo, $x(t) = t$.
3. Cuando las frecuencias ω_1 y ω_2 no son resonantes; es decir, cuando $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$. Por ejemplo, si tomamos $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = \pi$, la solución $x(t) = \sin \pi t + \sin t$ es cuasiperiódica, pero no es periódica.

---

2 puntos. Calcular el régimen permanente de la EDO $x'' + x' + x = \cos t - 2\sin t$. ¿Qué tipo de oscilación es esta EDO? ¿Qué es el régimen permanente de una oscilación de ese tipo? ¿Por qué se llama permanente?

Solución: Es una oscilación forzada amortiguada cuyo término no homogéneo es periódico. El régimen permanente de una oscilación de este tipo es la única solución periódica de la oscilación y el nombre es debido a que se comporta siempre de la misma forma. Además, cualquier otra solución de la EDO tiende a ella.

Aplicando la metodología seguida en el método de los coeficientes indeterminados, sabemos que existe una solución particular $x_{\mathrm{p}}(t)$ que es una combinación lineal de las funciones trigonométricas $\cos t$ y $\sin t$. Así pues, como esa $x_{\mathrm{p}}(t)$ es periódica, coincide con el regimen permanente $\bar{x}(t)$ que estamos buscando. Es decir,
$$\bar{x}(t) = x_{\mathrm{p}}(t) = A\cos t + B\sin t,$$
para algunos coeficientes desconocidos $A, B \in \mathbb{R}$ que determinamos imponiendo que se cumpla la EDO:
$$\cos t - 2\sin t = \bar{x}''(t) + \bar{x}'(t) + \bar{x}(t) = \bar{x}'(t) = B\cos t - A\sin t \Longrightarrow A = 2,\ B = 1 \Longrightarrow \bar{x}(t) = 2\cos t + \sin t.$$
