Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 17 de abril de 2009 Depositado en `www.ma1.upc.edu/~edis/` Tiempo: 75 minutos

Apellidos, Nombre:

---

2 puntos. Consideramos el PVF lineal homogéneo $(1+t)x'' + tx' - x = 0$, $x'(0) = \alpha x(0)$, $x(1) = x(0)$.

1. Calcular la solución general de la EDO anterior usando que $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ es una de sus soluciones.
2. ¿Para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tiene soluciones no triviales el PVF? Fijado ese valor, calcularlas todas.

Solución: Aplicamos la fórmula de reducción de orden para calcular una segunda solución:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{\mathrm{e}^{-\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t}}{x_1(t)^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}\int \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-t+\ln(1+t)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}\int (1+t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}t\mathrm{e}^{t} = t.$$

Por tanto, la solución general de la EDO es $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t$, siendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dos parámetros libres. A continuación imponemos las dos condiciones de frontera:

$$-c_1 + c_2 = x'(0) = \alpha x(0) = \alpha c_1, \qquad \mathrm{e}^{-1}c_1 + c_2 = x(1) = x(0) = c_1.$$

De la primera condición se obtiene que $c_2 = (1+\alpha)c_1$, mientras que la segunda implica que $c_2 = (1-\mathrm{e}^{-1})c_1$. Por tanto, sólo cuando $\alpha = -\mathrm{e}^{-1}$ existen soluciones no triviales; a saber, las funciones $x(t) = c_1\big(\mathrm{e}^{-t} + (1-\mathrm{e}^{-1})t\big)$, $c_1 \neq 0$.

3.5 puntos. Consideramos la EDO lineal no homogénea $x^{(4)} - x = 45\sin(2t)$.

1. Calcular su solución general.
2. Calcular todas sus soluciones periódicas. ¿Tienen el mismo periodo? En caso afirmativo, dar el periodo común. En caso negativo, dar el periodo de cada solución.
3. Si $x(t)$ es su solución determinada por las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$, ¿cuál es el menor valor de $n \geq 4$ tal que $x^{(n)}(0) \neq 0$? ¿Qué valor tiene esa primera derivada no nula? (Indicación: No es necesario resolver explícitamente el PVI planteado.)

Solución: Empezamos calculando la solución general por el método de coeficientes indeterminados.

- *Paso 1: Resolver la EDO homogénea.*
  La tabla del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ es

Raíces	Mult.	Funciones
1	1	e^{t}
-1	1	e^{-t}
$\pm\mathrm{i}$	1	$\cos t, \sin t$

  Por tanto, $x_{\mathrm{h}}(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t$, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres.
- *Paso 2: Encontrar un polinomio $P_1(\lambda)$ que anule al término no homogéneo $b(t) = 45\sin(2t)$.*
  El polinomio $P_1(\lambda) = \lambda^2 + 4$ anula a cualquier múltiplo de la función $\sin(2t)$.
- *Paso 3: Construir un candidato $x_{\mathrm{p}}(t)$ a solución particular usando el polinomio $P(\lambda)P_1(\lambda)$.*
  La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda^4-1)(\lambda^2+4)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
1	1	e^{t}
-1	1	e^{-t}
$\pm\mathrm{i}$	1	$\cos t, \sin t$
$\pm 2\mathrm{i}$	1	$\underline{\cos(2t), \sin(2t)}$

  Nuestro candidato a solución particular es la combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la primera: $x_{\mathrm{p}}(t) = c_5\cos(2t) + c_6\sin(2t)$, siendo c_5 y c_6 coeficientes a determinar.
- *Paso 4: Determinar los coeficientes indeterminados imponiendo que $x_{\mathrm{p}}(t)$ cumpla la EDO.*

$$45\sin(2t) = x_{\mathrm{p}}^{(4)} - x_{\mathrm{p}} = \big(16c_5\cos(2t) + 16c_6\sin(2t)\big) - \big(c_5\cos(2t) + c_6\sin(2t)\big) = 15c_5\cos(2t) + 15c_6\sin(2t).$$

  Obtenemos que los coeficientes son $c_5 = 0$ y $c_6 = 3$.

Finalmente, $x_{\mathrm{g}}(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t + 3\sin(2t)$, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres.

Las frecuencias $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$ son resonantes, luego tomando $c_1 = c_2 = 0$, queda $x(t) = c_3\cos t + c_4\sin t + 3\sin(2t)$, con $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres. que son todas las soluciones periódicas de la EDO. La solución particular $x_{\mathrm{p}}(t) = 3\sin(2t)$ tiene periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \pi$, todas las demás tienen periodo $T = \mathrm{m.c.m.}[2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \mathrm{m.c.m.}[2\pi, \pi] = 2\pi$.

La tercera parte del problema consiste en evaluar en el instante $t = 0$ las derivadas n-ésimas usando la EDO. Despejando la derivada cuarta de la EDO, queda que $x^{(4)}(t) = 45\sin(2t) + x(t)$, luego $x^{(4)}(0) = 0 + x(0) = 0$. Derivando la expresión anterior vemos que $x^{(5)}(t) = 90\cos(2t) + x'(t)$, luego $x^{(5)}(0) = 90 + x'(0) = 90 \neq 0$.

---

2 puntos.

1. Calcular la solución del PVI $X' = AX$, $X(0) = X_0$, donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. ¿Tiene el sistema $X' = AX$ alguna solución $X(t)$ acotada para todo $t \in \mathbb{R}$?

Solución: Como la matriz A es triangular superior, sus VAPs son $\lambda_1 = -2$ (simple) y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (doble). Vemos que $\vec{v}_1 = (1,0,0)^t$ es un VEP de VAP $\lambda_1 = -2$. Además, la matriz A es diagonalizable, ya que

$$\mathrm{Nuc}(A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\vec{v}_2, \vec{v}_3], \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general del sistema $X' = AX$ se puede escribir así:

$$X_\mathrm{h}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + c_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^t \\ c_2 \mathrm{e}^t \\ c_3 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Los tres parámetros libres se determinan imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 1 \Longrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Para responder a la pregunta final, notamos que ninguna de las dos funciones exponenciales que aparecen en la expresión de la solución general (e^{-2t} y e^t) está acotada en $\mathbb{R}$. En particular, la función $X_\mathrm{h}(t)$ es acotada si y sólo si $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Por tanto, la única solución del sistema acotada en toda la recta real es la función idénticamente nula.

1.5 puntos. Sea λ un VAP de una matriz cuadrada A. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}, \qquad A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Entonces, <u>una</u> de las funciones vectoriales

$$Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\vec{v} + t\vec{u}), \qquad Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$$

es solución del sistema $X' = AX$. Decir cuál y escribir la prueba.

Solución: (Aviso: También existía <u>otro</u> enunciado, obtenido por permutación de las funciones $Y(t)$ y $Z(t)$.)

En este enunciado es la segunda, pues calculando su derivada vemos que

$$Z'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v}) + \mathrm{e}^{\lambda t}\vec{v} = \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda\vec{u} + t\lambda\vec{v} + \vec{v}) = \mathrm{e}^{\lambda t}(A\vec{u} + tA\vec{v}) = \mathrm{e}^{\lambda t}A(\vec{u} + t\vec{v}) = A\mathrm{e}^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v}) = AZ(t).$$

En el otro enunciado, la solución era $Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$.

---

1 punto. Consideramos el campo de vectores asociado al sistema 2D de primer orden en forma normal

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1-y) \\ y' & = & y(x-1) \end{array} \right. .$$

¿En qué puntos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es horizontal el campo de vectores? ¿Y en qué puntos es vertical? Dibujar ambos lugares geométricos.

Solución: Recordamos que el campo de vectores asociado al sistema consiste en "plantar" en cada punto $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ el vector velocidad $\vec{v}_0 = (x_0', y_0')$ dado por las ecuaciones del sistema. Es decir,

$$x_0' = x_0(1 - y_0), \qquad y_0' = y_0(x_0 - 1).$$

El vector $\vec{v}_0$ es horizontal si y sólo si $0 = y_0' = y_0(x_0 - 1)$ y vertical si y sólo si $0 = x_0' = x_0(1 - y_0)$. Por tanto, los puntos con velocidad horizontal están situados sobre el eje horizontal $\{y = 0\}$ o la recta vertical $\{x = 1\}$, mientras que los puntos con velocidad vertical están situados sobre el eje vertical $\{x = 0\}$ o la recta horizontal $\{y = 1\}$.