Equacions Diferencials

Codi: 22701 **A**

Temps: 25 minuts | **Avaluació Continuada** | 30 d'Octubre de 2007

NOM: ....

COGNOMS: ....

DNI: ....

GRUP: .... **NOTA:**

- (a) Considereu el moviment harmònic donat pel següent problema de valors inicials

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Quant val l'amplitud de l'oscil·lació en funció de x_0, v_0 i ω ?

(b) Resoleu el problema de valors inicials $x'' + 16x = 12\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

(c) Quant val el període mínim de la solució de (b)?

Resolució:

(a) $x'' + \omega^2 x = 0 \Longrightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Condicions inicials: $\left.\begin{array}{l} x_0 = x(0) = A\sin\varphi \\ v_0 = x'(0) = A\omega\cos\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sin\varphi = \dfrac{x_0}{A} \\ \cos\varphi = \dfrac{v_0}{\omega A} \end{array}$

$$\Longrightarrow 1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{v_0}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{A}\right)^2 \Longrightarrow A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}.$$

(b) $x'' + 16x = 12\cos 2t \Longrightarrow x_g(t) = \underbrace{c_1\cos 4t + c_2\sin 4t}_{x_h(t)} + \underbrace{c_3\cos 2t + c_4\sin 2t}_{x_p(t)}$.

Determinen c_3 i c_4 imposant que $x_p(t)$ compleix l'equació diferencial ordinària

$$12\cos 2t = x_p''(t) + 16x_p(t) = (16-4)c_3\cos 2t + (16-4)c_4\sin 2t$$

$\Longrightarrow c_3 = 1$ i $c_4 = 0$

$\Longrightarrow x_p(t) = \cos 2t$.

Determinem c_1 i c_2 imposant les condicions inicials

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x(0) = c_1 + 1 \\ 0 = x'(0) = 4c_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t) = \cos 2t - \cos 4t$$

(c) $\left.\begin{array}{l} \text{Període de } \cos 2t \longrightarrow \dfrac{2\pi}{2} = \pi \\ \text{Període de } \cos 4t \longrightarrow \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Període de } x(t) \longrightarrow \text{MCM}\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$