Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 30 minuts 30 d'Octubre de 2002

Avaluació Continuada

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:**

1. Sigui A una matriu constant 3×3 que té λ com a valor propi de multiplicitat 3 i base de Jordan associada $\vec{v}^{\,0}$, $\vec{v}^{\,1}$, $\vec{v}^{\,2}$ (és a dir que, $A\vec{v}^{\,0} = \lambda\vec{v}^{\,0}$, $A\vec{v}^{\,1} = \lambda\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,0}$, $A\vec{v}^{\,2} = \lambda\vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,1}$).

   (a) Proveu que
   $$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\vec{v}^{\,1} + t\vec{v}^{\,0}\right]$$
   és solució de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

   <u>Solució</u>: Substituïm $\vec{x}(t)$ en l'equació i veiem que la verifica:
   $$\begin{aligned}
   \vec{x}\,'(t) &= e^{\lambda t}(\lambda\vec{v}^{\,1} + (\lambda t + 1)\vec{v}^{\,0}) \\
   A\vec{x}(t) &= e^{\lambda t}(A\vec{v}^{\,1} + tA\vec{v}^{\,0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enunciat}}}{=} e^{\lambda t}((\lambda\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,0}) + t\lambda\vec{v}^{\,0}) = \\
   &= e^{\lambda t}(\lambda\vec{v}^{\,1} + (\lambda t + 1)\vec{v}^{\,0})
   \end{aligned}$$
   Per tant, $\vec{x}(t)$ és solució de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

   (b) Doneu dues solucions linealment independents del sistema diferencial
   $$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}\,.$$

   <u>Solució</u>: La matriu té $\lambda = 1$ com a valor propi de multiplicitat 3.
   Una base de Jordan associada és
   $$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Fent servir l'arpartat (a), 2 solucions linealment independents serien, per exemple:
   $$\vec{x}_0(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_0, \quad \vec{x}_1(t) = e^{\lambda t}(\vec{v}_1 + t\vec{v}_0).$$
   D'on
   $$\vec{x}_0(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t(t-1) \\ e^t \\ e^t(t-1) \end{pmatrix}.$$
   Obs. També podríem trobar la matriu fonamental i agafar-ne 2 columnes qualssevol (serien 2 solucions linealment independents.)

Equacions Diferencials **Codi: 22701** **B**

Temps: 30 minuts 30 d'Octubre de 2002

Avaluació Continuada

NOM:	....	
COGNOMS:	....	
DNI:	....	
GRUP:	....	**NOTA:**

1. Sigui A una matriu constant 3×3 que té λ com a valor propi de multiplicitat 3 i base de Jordan associada $\vec{v}^{\,0}$, $\vec{v}^{\,1}$, $\vec{v}^{\,2}$ (és a dir que, $A\vec{v}^{\,0} = \lambda\vec{v}^{\,0}$, $A\vec{v}^{\,1} = \lambda\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,0}$, $A\vec{v}^{\,2} = \lambda\vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,1}$).

   (a) Proveu que
$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\vec{v}^{\,1} + t\vec{v}^{\,0}\right]$$
   és solució de $\vec{x}^{\,\prime} = A\vec{x}$.

   Solució: Substituïm $\vec{x}(t)$ en l'equació i veiem que la verifica:
$$\begin{aligned} \vec{x}^{\,\prime}(t) &= e^{\lambda t}(\lambda\vec{v}^{\,1} + (\lambda t + 1)\vec{v}^{\,0}) \\ A\vec{x}(t) &= e^{\lambda t}(A\vec{v}^{\,1} + tA\vec{v}^{\,0}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enunciat}}}{=} e^{\lambda t}((\lambda\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,0}) + t\lambda\vec{v}^{\,0}) = \\ &= e^{\lambda t}(\lambda\vec{v}^{\,1} + (\lambda t + 1)\vec{v}^{\,0}) \end{aligned}$$
   Per tant, $\vec{x}(t)$ és solució de $\vec{x}^{\,\prime} = A\vec{x}$.

   (b) Doneu dues solucions linealment independents del sistema diferencial
$$\vec{x}^{\,\prime} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 17 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}\,.$$

   Solució: La matriu té $\lambda = 1$ com a valor propi de multiplicitat 3.
   Una base de Jordan associada és
$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Fent servir l'arpartat (a), 2 solucions linealment independents serien, per exemple:
$$\vec{x}_0(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_0, \quad \vec{x}_1(t) = e^{\lambda t}(\vec{v}_1 + t\vec{v}_0).$$
   D'on
$$\vec{x}_0(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ e^t(4+t) \end{pmatrix}.$$
   Obs. També podríem trobar la matriu fonamental i agafar-ne 2 columnes qualssevol (serien 2 solucions linealment independents.)
