# Equacions Diferencials

**Codi: 22701** **A**

Temps: 20 minuts

29 de Març de 2007

---

**Avaluació Continuada**

**NOM:** ........................................
**COGNOMS:** ........................................
**DNI:** ........................................
**GRUP:** ........................................ **NOTA:**

- Considereu l'equació diferencial lineal homogènia de segon ordre

$$x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0\,, \quad x > 0\,. \tag{1}$$

1. Demostreu que el canvi $y(x) = xu(x)$ transforma (1) en l'equació diferencial ordinària

$$u'' - u = 0\,, \quad x > 0\,. \tag{2}$$

2. Resoleu (2).
3. Deduïu la solució de (1).

**Resolució:**

1. Canvi: $y(x) = xu(x) \Longrightarrow \begin{array}{l} y'(x) = u(x) + xu'(x) \\ y''(x) = 2u'(x) + xu''(x) \end{array}$

   Així:

$$\begin{aligned}
& x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0, \quad x > 0 \\
\Longrightarrow\quad & x^2(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + (2 - x^2)xu = 0, \quad x > 0 \\
\Longrightarrow\quad & u''(x^3) + u'(2x^2 - 2x^2) + u(-2x + 2x - x^3) = 0, \quad x > 0 \\
\Longrightarrow\quad & x^3(u'' - u) = 0, \quad x > 0 \\
\Longrightarrow\quad & \boxed{u'' - u = 0, \quad x > 0}
\end{aligned}$$

2. Si $u'' - u = 0 \Longrightarrow$ polinomi característic:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 \Longrightarrow \boxed{u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}}$$

3. $\boxed{y(x) = xu(x) = c_1xe^x + c_2xe^{-x}}$